GEOMETRIE
IN SPAȚIU

GEOMETRIE ÎN SPAŢIU

CLASA IV-a SECUNDARĂ

GIMNAZII, LICEE, ŞCOLI NORMALE, SEMINARII, etc.

ERNEST ABASON
Profesor şi Subdirector de studii la Şc. Politechnică Regele Carol II, Bucureşti. Fost profesor la Liceul Cantemir Vodă şi la Secţiunea Pedagogică Universitară

AL. ANDRONIC
Profesor secundar în Bucureşti
Fost profesor la liceul M-rea Dealu

GH. DUMITRESCU
Profesor secundar în Bucureşti.
Fost profesor la liceul M-rea Dealu

EDIŢIA I-a

Aprobat de Ministerul Instrucţiunii cu No. 663/935

EDITURA AUTORILOR ASOCIAŢI

GEOMETRIE ÎN SPAȚIU

CLASA IV-a SECUNDARĂ

GIMNAZII, LICEE, ŞCOLI NORMALE, SEMINARII etc.

ERNEST ABASON
Profesor şi Subdirector de studii la Şc. Politechnică Regele Carol II. Fost profesor la Liceul Cantemir Vodă şi la Secţiunea Pedagogică Universitară

AL. ANDRONIC
Profesor secundar în Bucureşti
Fost profesor la liceul M-rea Dealu

GH. DUMITRESCU
Profesor secundar în Bucureşti.
Fost profesor la liceul M-rea Dealu

EDIȚIA I-a

Aprobat de Ministerul Instrucţiunii cu No. 663/935

EDITURA AUTORILOR ASOCIAȚI

87—935—3000

Toate exemplarele vor fi numerotate şi semnate de autor propria manu.

ÎN LOC DE „PREFAŢA“

Referat asupra manualului de Geometrie pentru cl. IV al d-lor: E. ABASON, AL. ANDRONIC *şi* GH. DUMITRESCU.

D-nii autori încheie seria manualelor prezentate nouă spre cercetare tot aşa de frumos, precum au deschis-o.

Manualul de Geometrie în spaţiu este o lucrare de inspiraţie şi în acelaş timp de muncă conştiincioasă.

Ca cuprins şi ca metodă intră exact în cerinţele programei analitice.

Prin mijloace cât mai simple şi mai apropiate de puterea de observaţie şi pricepere a copiilor, d-nii autori se străduesc să facă uşoară intrarea în această materie a elevilor de clasa IV.

Prezentarea noţiunilor abstracte este totdeauna precedată de o bună pregătire prin numeroase exemple concrete, iar proprietăţile ce urmează definiţiilor sunt scoase în mod cât mai elementar, aşa cum recomandă programa.

După fiecare capitol de teorie, noţiunile câştigate se fixează prin numeroase şi foarte variate aplicaţiuni.

Nota de originalitate a acestui manual stă în caracterul de accentuată intuiţie şi aplicaţie, realizat prin metoda adoptată de d-nii autori, precum şi subiectele tratate.

În special citām aplicaţiile dela finele cărţii, multe cu subiecte din fizică (aplicarea fenomenelor de dilataţie, principiul lui Archimede, magnetism etc.), precum şi modul de introducere al noţiunii de plan; modul de realizare practică a unei suprafeţe plane; stabilirea volumului piramidei şi ariei unei zone, fără demonstraţie, ci în mod experimental; la aplicaţii: calculul volumului unei grinzi şi unei coloane care intervin în construcţii,

calculul stivelor de lemne, cubajul grămezilor de cereale etc.; descrierea şi analiza corpurilor geometrice care intervin ca ornamente artistice în construcţie.

Cu toată convingerea recomandăm acest manual pentru aprobare conform art. 11, alin. I, fiind o carte vie, atrăgătoare, interesantă şi utilă.

(ss) *Ed. Munroe*
Directoare şi Profesoară la Azilul Elena Doamna, Bucureşti

(ss) *C. Motomancea*
Profesor la Liceul Cantemir Vodă, Bucureşti

GEOMETRIE IN SPAŢIU

CAP. I.

PLANUL.

Exemple. 1. Dacă aşezăm o riglă AB pe o masă netedă (fig. 1), observăm că rigla se aşterne în toată întinderea ei pe suprafaţa mesei.

Acelaş lucru se întâmplă, oricum am aşeza rigla, în poziţia A′B′, A″B″, etc.

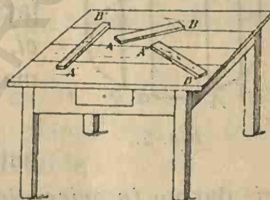


Fig. 1.

De aceeaş proprietate se bucură suprafaţa unei plăci de sticlă, a unui perete neted, a unei podele din lemn de parchet, etc.

2. Pentru a obţine din lemn, o suprafaţă pe care o linie dreaptă să se aştearnă în toată întinderea ei, *în orice poziţie am aşeza-o*, tâmplarul (sau dulgherul) întrebuinţează *rândeaua*, care este un instrument din lemn, de forma din fig. 2, prevăzut cu un cuţit, în linie dreaptă.

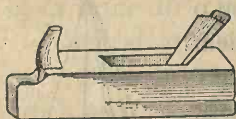


Fig. 2.

Când tâmplarul *dă la rândea* un lemn, (fig. 3) el mişcă rândeaua în diferite direcţii, pentru a lua cu cuţitul ei aşchii de lemn, până ce acest cuţit se aşează în *toată întinderea lui* pe suprafaţa lemnului în orice direcţiune.



Fig. 3.

3. Pentru a obţine un perete perfect neted, zidarul procedează în mod analog, întrebuinţând un instrument numit *drişcă* (fig. 4), iar operaţiunea de *netezire* a peretelui se cheamă *drişcuire* (fig. 5).



Fig. 4.



Fig. 5.

Suprafeţele precum: o masă perfect

netedă, o podea cu parchete foarte bine netezite, o placă de sticlă, etc., se numesc *suprafeţe plane.*

Suprafeţele plane au deci proprietăţile:

Pe ele putem aşeza o linie dreaptă 1. *în toată întinderea ei,* şi 2. *în orice direcţiune am voi.*

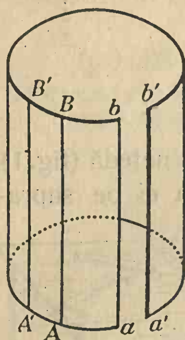


Fig. 6.

Nu toate suprafeţele se bucură de această proprietate.

Exemple. 1. Dacă îndoim o bucată de tablă, în forma unui dreptunghiu, astfel ca să semene cu suprafaţa unui burlan (sau a unei cutii de conserve, etc.), şi încercăm să aşezăm pe suprafaţa astfel obţinută, o riglă *în toată întinderea ei,* nu reuşim decât dacă o aşezăm paralel cu marginile *ab, a'b'* ale hârtiei (fig. 6).

Rezultă de aci, că pe această suprafaţă putem aşeza o linie dreaptă *în toată întinderea ei,* dar nu *în orice direcţie* am voi.

Suprafaţa de mai sus, *nu este* deci o suprafaţă plană; ea se cheamă *suprafaţă cilindrică.*

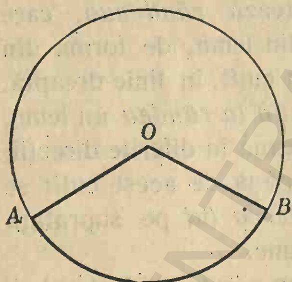


Fig. 7.

2. Să desenăm pe o hârtie un cerc şi să tăiem din acest cerc o porţiune în formă de sector AOB, (cuprinsă între două raze OA, OB şi arcul AB) (fig. 7). Să îndoim apoi hârtia în formă de cornet (pâlnie), aşa cum facem când ne servim de un pahar de hârtie pentru a bea apă (fig. 8).

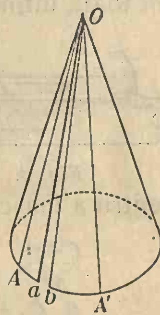


Fig. 8.

Pe suprafaţa astfel obţinută putem aşeza o linie dreaptă *în toată întinderea ei,* numai dacă o aşternem în poziţia OA, OA', ..., adică trecând prin vârful O şi sprijinindu-se pe marginea în formă de cerc a hârtiei.

Dacă încercăm să aşezăm pe această suprafaţă, *în toată lungimea ei,* o linie dreaptă într'alt mod, *nu reuşim.*

Reiese de aci, că suprafaţa *nu este plană;* ea este o suprafaţă *conică* cu vârful în punctul O.

3. Să luăm o mingie (sau un balon de gumă, etc.) (fig. 9); *oricum* am încerca să aşezăm o linie dreaptă, *în toată întinderea ei*, pe suprafaţa mingiei, *nu reuşim.*

Deci nici această suprafaţă *nu este plană;* ea este o suprafaţă *sferică.*



Fig. 9.

Suprafeţele din figurile 6, 8, 9, spre deosebire de suprafeţele *plane,* se numesc suprafeţe *curbe.*

Dintr'o suprafaţă plană, putem obţine prin *îndoire* sau *răsucire,* suprafeţe curbe.

O planşetă plană, bine udată şi aşezată lângă sobă, se deformează şi devine o suprafaţă curbă (fig. 10).



Fig. 10.

Am văzut însă că există şi suprafeţe *curbe,* care nu provin din îndoirea sau deformarea unei suprafeţe plane: spre exemplu suprafaţa unei mingi, a unui pahar în forma din fig. 11, etc.

Definiţie. *Planul* este o suprafaţă, care se întinde la *nesfârşit,* în toate direcţiunile şi pe care o linie dreaptă se poate aşterne: a) *în toată lungimea ei* şi b) *în orice direcţiune am aşeza-o.*

Suprafaţa unei mese, a unei podele, a unui perete, a unei plăci de sticlă etc., sunt *porţiuni* dintr'un plan, adică au o întindere *mărginită* (o arie), spre deosebire de plan, care este nesfârşit de întins în toate direcţiunile.



Fig. 11.

Aplicaţie. Pentru a verifica dacă suprafaţa unui teren este *plană,* se procedează practic astfel: se ia pe acea suprafaţă *la întâmplare,* două puncte A şi B, în care se bate câte un ţăruş şi între ele se întinde bine o sfoară (fig. 12). Dacă această sfoară se aşează cu toate punctele ei pe suprafaţa pământului, repetăm operaţia schimbând locul ţăruşilor în A′B′, A″B″, ...

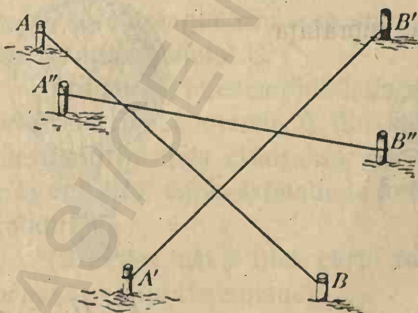


Fig. 12.

În cazul când în toate aceste poziţii sfoara atinge cu

toate punctele ei pământul, spunem că *terenul are suprafaţa plană* deoarece o linie dreaptă AB s'a putut aşterne pe el: *a) în toată întinderea ei* şi b) *în orice direcţiune am aşezat-o.*

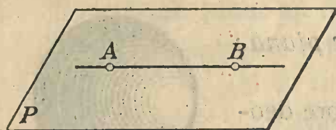


Fig. 13.

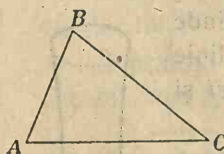
Din cele ce preced reiese:

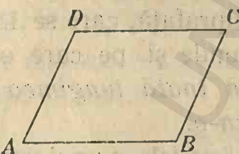
Proprietate: *Dacă unim două puncte oarecare* A, B, *ale unui plan* P, *printr'o linie dreaptă, toate punctele dreptei se găsesc pe plan* (dreapta este aşternută pe plan în toată întinderea ei) (fig. 13).

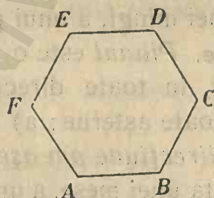
Reprezentarea şi citirea unui plan. Neputând desena o suprafaţă *nemărginită* cum este *planul,* pe o bucată de hârtie sau pe tabelă, obişnuim să desenăm numai o porţiune din plan, printr'un paralelogram, pe care-l notăm cu o literă, spre exemplu P şi citim *planul* P (fig. 13, 14).



Fig. 14.







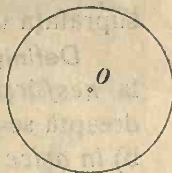


Fig. 15.

Figuri plane şi figuri neplane. *Exemple.* 1. Se ştie din Geometria plană că triunghiul, paralelogramul, un poligon regulat oarecare, cercul, ... (fig. 15), au *toate punctele* situate pe un plan, care este planul triunghiului, planul paralelogramului, planul cercului.

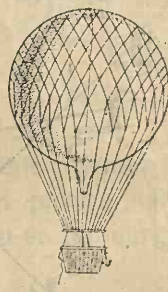
2. Alte figuri geometrice ca: suprafaţa







Fig. 16.


Fig. 17.

care mărgineşte o sticlă de apă (fig. 16_a), un penar (fig. 16_b), suprafaţa unui vas cu flori (fig. 16c), suprafaţa care mărgineşte un balon (fig. 17),

un dirijabil (fig. 18), etc., nu sunt figuri plane, deoarece *punctele lor* nu se găsesc toate pe aceeaşi suprafaţă plană.

Rezultă de aci că figurile geometrice sunt de două feluri:

A) Figuri plane, cu studiul cărora se ocupă *Geometria plană.*

B) Figuri neplane (sau *figuri în spaţiu)* al căror studiu formează obiectul *Geometriei în spaţiu*, de care ne vom ocupa în cele ce urmează.

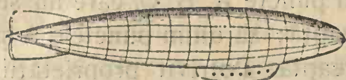


Fig. 18.

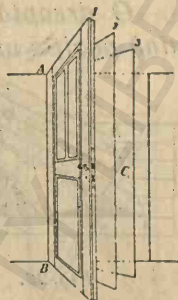


Fig. 19.

Determinarea planului.

Exemple. 1. O uşe are ca linie a balamalelor pe AB, în jurul căreia se roteşte: ea poate ocupa *oricât de multe* poziţii în spaţiu: *poziţiile* (1), (2), (3) ... (fig. 19).

Planul uşii, trece însă *totdeauna* prin dreapta AB.

2. Tot astfel, prin cotorul socotit ca o linie dreaptă, al unei cărţi, pot trece oricât de multe file (fig. 20).

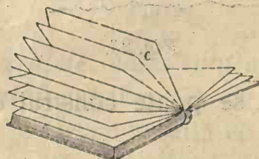


Fig. 20.

Rezultă deci că: *printr'o dreaptă* AB, *pot trece oricât de multe plane.*

In exemplul 1, se vede că dacă voim ca uşa să treacă şi printr'un punct *anumit* din spaţiu C, (nesituat pe direcţia AB), obţinem *o singură* poziţie a uşii, deoarece îndată ce uşa se va roti *cât de puţin* spre dreapta sau spre stânga din această poziţie, ea nu va mai conţine punctul C.

Tot astfel, în exemplul 2, dacă voim ca o filă a cărţii să treacă printr'un punct anumit C din spaţiu, (nesituat pe linia cotorului) *găsim o singură filă,* care răspunde la această condiţiune.

(Atât uşa, cât şi filele cărţii au fost presupuse suprafeţe plane).

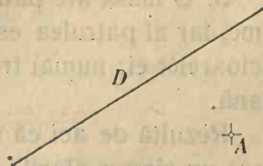


Fig. 21.

Reiese de aci că:

I. Printr'o dreaptă D *şi un punct* A, *(nesituat pe dreapta* D) *trece un plan şi numai unul singur* (fig. 21).

Se mai spune că:

O dreaptă şi un punct, nesituat pe acea dreaptă, determină poziţia unui plan în spaţiu.

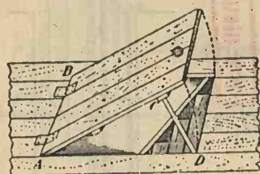


Fig. 22.

Exemple. Planul unui chipeng (capac de pivniţă) poate fi fixat prin dreapta AB a balamalelor şi punctul C, care este capătul unei proptele CD (fig. 22).

Fie trei puncte A, B, C, care nu sunt în linie dreaptă; să unim punctele A şi B printr'o dreaptă. Potrivit proprietăţii I, prin dreapta AB şi punctul C, va trece *un singur* plan.

Deci:

II. Prin trei puncte, care nu sunt situate în linie dreaptă, poate trece un plan şi numai unul singur.

sau:

Trei puncte, care nu sunt în linie dreaptă, fixează poziţia unui plan in spaţiu.



Fig. 23.

Exemple. 1. Astfel, prin trei puncte din spaţiu: A, situat mai sus şi mai în fund, B şi C situate mai jos şi mai în faţă, se poate construi o suprafaţă plană de acoperiş (fig. 23).

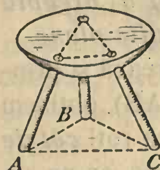


Fig. 24.

2. Un scaun de cismar cu trei picioare, se aşează *totdeauna* cu extremităţile A, B, C pe o podea plană (fig. 24).

Se vede deci, că prin trei puncte A, B, C, trece *numai* un plan (planul podelei).

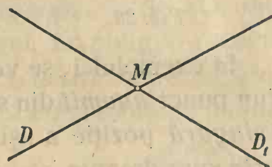


Fig. 25.

3. O masă are patru picioare, dintre care trei au aceeaşi lungime, iar al patrulea este mai scurt; dintre cele patru vârfuri ale picioarelor ei, numai trei din picioare pot atinge deodată o podea plană.

Rezultă de aci că nu totdeauna prin patru puncte din spaţiu trece un singur plan [1]).

---

[1]) Dacă unim cele patru puncte care sunt vârfurile picioarelor, prin linii drepte, patrulaterul obţinut este o figură neplană (patrulater strâmb).

Să considerăm două drepte D şi D_1 care se întâlnesc în punctul M (fig 25). Prin dreapta D şi un punct C al celeilalte drepte (diferit de M), se poate duce *un singur* plan (vezi proprietatea I).

Acest plan, conţinând dreapta D, va trece şi prin M; punctele C şi M, fiind în acest plan, el va conţine toată dreapta CD_1 (vezi proprietatea dela pag. 8) (fig. 13).

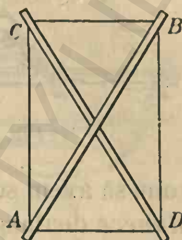


Fig. 26.

Prin urmare:

III. Prin două drepte care se întâlnesc, poate să treacă un plan şi numai unul singur.

sau:

Două drepte, care se întâlnesc, determină poziţia unui plan în spaţiu.

Exemple. 1. Când voim să construim un smeu, luăm două speteze de lemn AB, CD, care se încrucişează în punctul O: ele determină un plan format din hârtia smeului (fig. 26).

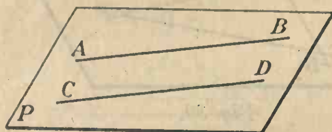


Fig. 27.

Se ştie din Geometria plană, că două drepte AB şi CD se numesc *paralele, când sunt aşezate în acelaş plan şi prelungite nu se întâlnesc* (fig. 27).

De aci rezultă că:

IV. Prin două drepte paralele poate să treacă un plan şi numai unul singur.

sau:

Două drepte paralele determină poziţia unui plan în spaţiu.

Exemple. Marginile paralele AB şi CD, a două ziduri determină poziţia planului podelelor (fig. 28).

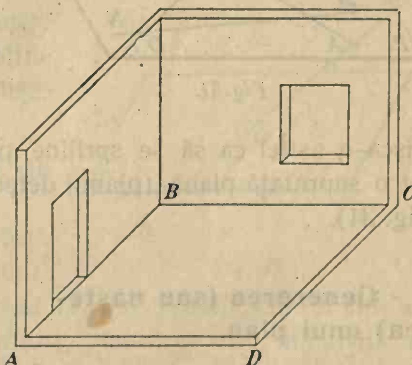


Fig. 28.

In rezumat, din cele ce preced, rezultă că *un plan este determinat:*

1. Printr'o dreaptă şi un punct exterior acestei drepte;
2. Prin trei puncte nesituate în linie dreaptă;
3. Prin două drepte care se întâlnesc;
4. Prin două drepte paralele.

Aplicaţii. Proprietatea unui plan de a fi determinat prin elementele geometrice înşirate mai sus, se aplică ori decâte ori este necesar să se realizeze practic o suprafaţă plană.



Fig. 29.

Pentru a se obţine o suprafaţă *plană* orizontală din nisip, se aşează două stinghii paralele AB şi CD, la înălţimea la care voim să avem suprafaţa plană şi facem ca o a treia stinghie MN, să *alunece* dealungul primelor două (fig. 29).

Nisipul de prisos este astfel dat la o parte şi suprafaţa obţinută este plană (planul determinat de dreptele paralele AB şi CD).

2. La acelaş rezultat se poate ajunge dacă fixăm o stinghie mobilă EF cu un cui, în punctul F şi o facem să se rotească în jurul acestui punct, astfel ca să se sprijine necontenit pe stinghia AB (fig. 30).

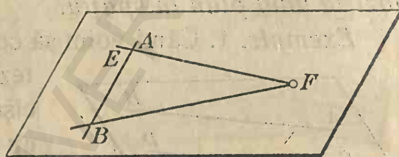


Fig. 30.

Stinghia mobilă EF *mătură* în acest mod o suprafaţă plană (planul determinat de dreapta AB şi punctul F).

3. Dacă în loc de două stinghii paralele (ca în fig. 29), am fixa două stinghii AB şi CD (care se întâlnesc în O), iar o a treia stinghie mobilă MN am mişca-o astfel ca să se sprijine pe primele două, ea va descrie tot o suprafaţă plană (planul determinat de dreptele AB şi CD) (fig. 31).

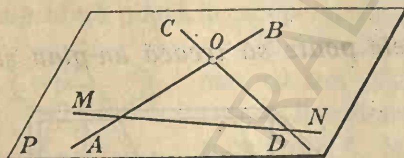


Fig. 31.

Generarea (sau naşterea) unui plan.

Din cele de mai sus rezultă că:

Un plan P, poate fi născut:

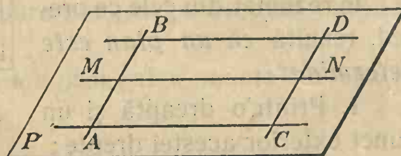


Fig. 32.

I. De o dreaptă MN, care se *mişcă (dreaptă mobilă)*,

rămânând paralelă cu ea şi sprijinindu-se pe două drepte paralele fixe AB, CD (fig. 32).[1])

II. De o dreaptă *mobilă* FE, care trece necontenit printr'un punct fix F şi se sprijineşte pe o dreaptă fixă AB (fig. 30).

III. De o dreaptă *mobilă* MN, care se sprijină necontenit pe două drepte *fixe* AB şi CD *concurente* (fig. 31).


Fig. 33.

Aplicaţii ale generării unui plan. Când se construieşte un acoperiş de casă, o podea de pod, un gard, etc., format din suprafeţe plane, se aplică de fapt modurile de generare ale unui plan, descrise mai sus.

Astfel pentru a face o podişcă, care să aibă o suprafaţă plană, se aşează întâi două lemne mai groase AB, CD (fig 33), astfel ca direcţiile AB şi CD să fie paralele şi pe ele se bat podele *paralele* MN, din înşiruirea cărora rezultă suprafaţă plană ABCD.

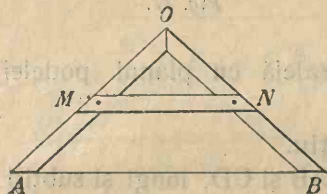


Fig. 34.

Pentru a obţine o suprafaţă plană de acoperiş, se poate proceda şi astfel: se fixează întâi două lemne OA şi OB, care se întâlnesc în punctul O; aşezând stinghii de lemn MN, care să se sprijine pe primele două, se realizează suprafaţa plană OAB (fig. 34).

Observare. In practică, stinghiile MN se aşează paralele între ele; acelaş rezultat l'am obţine însă dacă aceste stinghii ar fi aşezate neparalel.

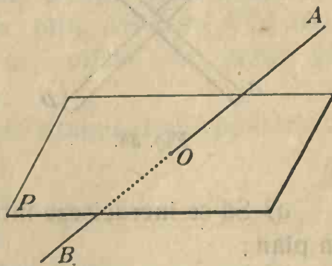


Fig. 35.

Poziţia unei drepte faţă de un plan.

O dreaptă AB, poate avea faţă de un plan P următoarele poziţiuni:

I. Dreapta AB *înţeapă (sau intersectează) planul* într'un punct O. In acest caz, ea *străbate* planul şi este împărţită de *punctul de intersecţie* O în două semidrepte OA şi OB, situate de o parte şi de alta a planului (fig. 35).

[1]) Dreapta MN rămânând paralelă cu ea însăşi, este suficient să spunem că se sprijină numai pe una din dreptele AB sau CD.

II. Dreapta are două puncte comune A *şi* B *cu planul* P; în acest caz, ea are toate punctele situate în plan, adică este *conţinută* (aşternută) în plan (vezi proprietatea pag. 8) (fig. 36).

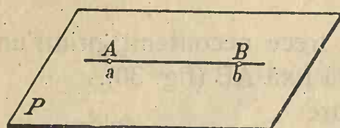


Fig. 36.

III. Dreapta AB *nu are nici un punct comun cu planul* P, oricât am prelungi-o; se zice în acest caz că *dreapta este paralelă cu planul* (fig. 37).

Exemple. 1. Un ţăruş înfipt oblic pe suprafaţa plană a pământului, înţeapă pământul într'un punct.

2. O linie dreaptă trasă pe un perete plan, este *conţinută* în acel plan.

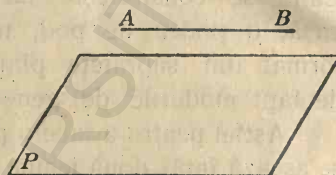


Fig. 37.

3. Orice dreaptă situată pe planul tavanului unei camere, este paralelă cu planul podelei.

Poziţia a două drepte în spaţiu.

Exemple. Să luăm două vergele AB şi CD, lungi şi subţiri; aceste vergele le putem aşeza în mai multe moduri:

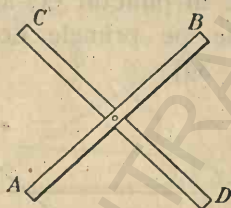


Fig. 38.

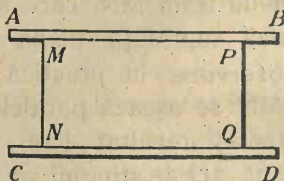


Fig. 39.

a) Să se încrucişeze într'un punct O (fig. 38): ele determină un plan;

b) Le putem aşeza dealungul marginilor unei plăci dreptunghiulare MNPQ (fig. 39); ele hotărăsc deasemenea poziţia unui plan. În această poziţie, oricât am prelungi direcţiile lor, vergelele nu se întâlnesc, adică sunt paralele;

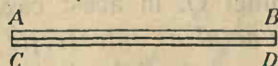


Fig. 40.

c) Le putem aşeza una peste alta, aşa fel ca să coincidă (fig. 40).

În acest caz, direcţia barelor nu determină un singur plan, de-

oarece s'a arătat că printr'o dreaptă pot trece oricât de multe plane.

d) Să aşezăm una din bare pe podea în AB şi pe cealaltă rezimată oblic pe perete în CD (fig. 41). In acest caz, direcţiile barelor *nu determină un plan*. Direcţiile lor nu se întâlnesc oricât le-am prelungi; cu toate acestea, dreptele AB, CD *nu sunt paralele, deoarece nu sunt situate în acelaş plan.*

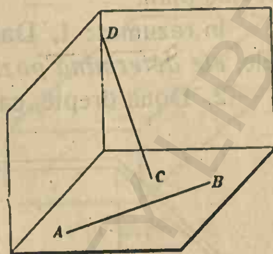


Fig. 41.

Din exemplele ce preced, putem conchide că, în spaţiu:

I., Două drepte AB, CD pot să se întâlnească (adică sunt *concurente*); ele determină poziţia unui plan P (fig. 42).

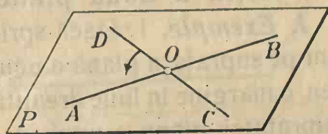


Fig. 42.

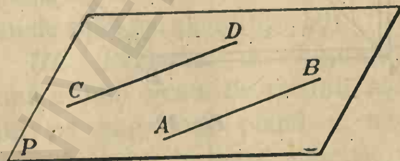


Fig. 43.

II. Două drepte AB, CD pot fi *paralele;* ele determină poziţia unui plan P (fig. 43).

III. Două drepte AB, CD pot fi *confundate;* ele nu determină poziţia unui singur plan, deoarece prin AB (sau CD) trec în acest caz, oricât de multe plane (fig. 44).



Fig. 44.

Dreptele AB şi CD au în această situaţie, toate punctele confundate; acest caz, poate fi obţinut sau din I., rotind dreapta CD în jurul punctului de intersecţie O, până se aşterne peste AB, sau din II., apropiind paralela CD până se confundă cu AB; putem spune deci, că două drepte confundate reprezintă un caz particular al dreptelor concurente sau paralele.

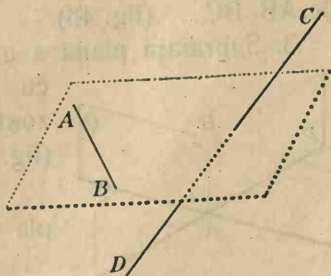


Fig. 45.

IV. Două drepte AB, CD nu sunt cuprinse în acelaş plan (fig. 45); oricât le-am prelungi, ele nu

se întâlnesc, *dar nu sunt nici paralele*, deoarece nu sunt în acelaş plan.

In rezumat: 1. Dacă două drepte sunt concurente sau paralele, *ele determină poziţia unui singur plan.*

2. Două drepte, care nu sunt nici concurente, nici paralele, *nu se pot găsi în acelaş plan.*

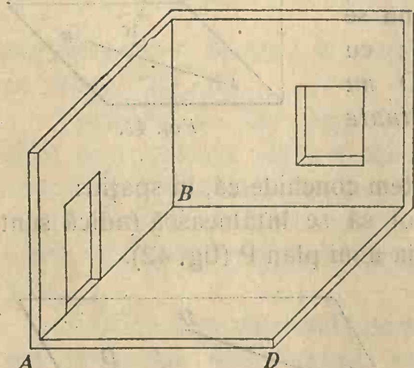


Fig. 46.

Reciproc:

1. Două drepte, care se găsesc în acelaş plan, *sunt sau concurente, sau paralele.*

2. Două drepte, care nu sunt în acelaş plan, *nu pot fi nici concurente nici paralele.*

Poziţia a două plane.

I. Exemple. 1. Dacă sprijinim pe suprafaţa plană a unui teren, o margine în linie dreaptă a suprafaţei plane a unui carton, a unui geam, a unei table etc., observăm că ea lasă pe teren o *urmă în linie dreaptă;* această dreaptă se găseşte aşternută şi pe suprafaţa plană a terenului şi pe a cartonului, geamului, etc.

2. Suprafeţele plane a doi pereţi ai unei camere, se întâlnesc după muchea BE a acestor pereţi; suprafaţa plană a podelei se întâlneşte cu suprafeţele plane ale pereţilor după dreptele AB, BC... (fig. 46).

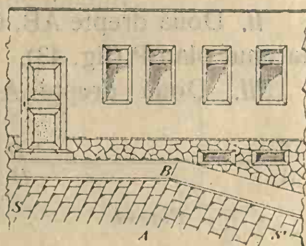


Fig 47.

3. Suprafaţa plană a unei străzi înclinate (S′), se întâlneşte cu suprafaţa plană a unei străzi orizontale (S), după o linie dreaptă AB (fig. 47).

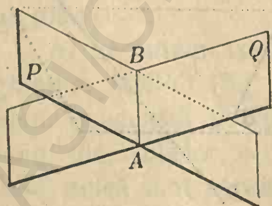


Fig 48.

Rezultă din toate aceste exemple că:

I. *Două plane* P *şi* Q *se pot intersecta după o linie* dreaptă AB (fig. 48), adică două plane au comun, punctele unei linii drepte.

Observare. Dacă două plane ar avea comun, pe lângă punctele unei drepte şi un punct exterior acesteia, ele ar coincide, deoarece *o dreaptă şi un punct exterior ei, hotărăsc poziţia unui singur plan*, (vezi pag. 9).

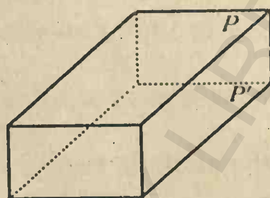


Fig. 49.

II. Exemple. 1. Suprafaţa plană a unui tavan şi suprafaţa plană a podelei, oricât de mult ar fi prelungite, *nu se întâlnesc*.

2. Tot astfel se întâmplă cu suprafeţele plane a două din feţele opuse P, P′ ale unui paralelipiped (fig. 49), etc.

Din aceste exemple rezultă că:

II. Două plane P şi Q pot să nu se întâlnească oricât le-am prelungi; în care caz se zice că planele sunt paralele (fig. 50).

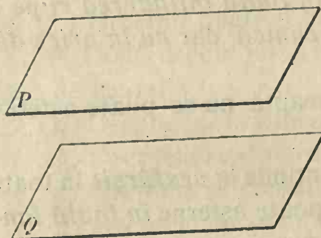


Fig. 50.

III. Exemple. 1. Suprafaţa plană a unui geam de cristal, aşezată pe suprafaţa plană a unui birou, coincide în toate punctele ei cu suprafaţa plană a mesei.

2. Când lipim pe o planşetă o hârtie de desen, suprafaţa plană a hârtiei coincide cu suprafaţa plană a planşetei.

Rezultă de aci că:

III. Două plane P şi Q pot *coincide* în spaţiu.

In rezumat deci, două plane P şi Q:

1. *se pot intersecta după o linie dreaptă.*
2. *pot fi paralele.*
3. *pot coincide.*

REZUMAT.

CAP. I. — PLANUL.

* O suprafaţă *plană* este aceea, pe care putem aşterne o linie dreaptă, *în toată întinderea ei* şi *în orice direcţiune* am aşeza-o.

* O linie dreaptă se poate aşterne *în toată întinderea ei* pe o suprafaţă *cilindrică* sau pe o suprafaţă *conică*, dar *nu în orice direcţiune* am aşeza-o.

Pe o suprafaţă *sferică*, o linie dreaptă nu se poate aşterne în niciun fel.

* *Planul* este o suprafaţă, care se întinde la *nesfârşit* în toate direcţiunile şi pe care o linie dreaptă se poate aşterne *în toată lungimea ei* şi *în orice direcţiune* am aşeza-o.

Suprafeţele *plane* sunt *porţiuni* dintr'un plan, adică au o întindere *mărginită*, pe când planul are o întindere *nemărginită* în toate direcţiunile.

* Dacă unim două puncte oarecare ale unui plan, printr'o linie dreaptă, toate punctele dreptei se găsesc pe plan.

* In desen, planul se reprezintă printr'un *paralelogram* şi se notează cu o literă.

* Figurile, care au toate punctele situate *în acelaş plan*, se numesc *figuri plane* şi proprietăţile lor se studiază în *Geometria plană*.

Figurile, care nu au toate punctele în acelaş plan, sunt *figuri neplane* (sau *figuri în spaţiu*); cu studiul lor se ocupă *Geometria în spaţiu*.

* *Determinarea planului.*

Printr'o dreaptă pot trece oricât de multe plane.

Poziţiunea unui plan este *hotărîtă* (fixată, determinată):

a) de o dreaptă şi un punct, nesituat pe dreaptă;

b) de trei puncte, care nu sunt situate în linie dreaptă;

c) De două drepte care se întâlnesc ;

d) De două drepte paralele.

In fiecare din aceste cazuri, se obţine câte un *singur* plan.

* Un plan poate fi *generat* (născut):

a) De o dreaptă mobilă, care rămâne paralelă cu ea şi se sprijină pe două drepte fixe, paralele între ele*) ;

b) De o dreaptă mobilă, care trece necontenit printr'un punct fix şi se sprijină pe o dreaptă fixă ;

c) De o dreaptă mobilă, care se sprijineşte necontenit pe două drepte *fixe* concurente.

* O dreaptă poate avea faţă de un plan, următoarele poziţii :

a) Dreapta înţeapă planul (dreapta intersectează planul);

b) Dreapta are două puncte comune cu planul (în acest caz este în întregime conţinută în plan);

c) Dreapta poate fi paralelă cu planul (nu întâlneşte planul).

* Două drepte pot avea în spaţiu, următoarele poziţiuni, una faţă de cealaltă :

a) Dreptele se întâlnesc într'un punct (dreptele sunt concurente);

b) Dreptele sunt paralele;

c) Dreptele se confundă ;

d) Dreptele nu se întâlnesc, nici nu sunt paralele.

* *In rezumat:*

1. Dacă două drepte sunt concurente sau paralele, *ele determină poziţia unui singur plan;*

2. Două drepte care nu sunt nici concurente nici paralele, *nu se pot găsi în acelaş plan.*

Reciproc:

1. Două drepte, care se găsesc în acelaş plan, *sunt sau concurente sau paralele;*

2. Două drepte care nu sunt în acelaş plan, *nu pot fi nici concurente nici paralele.*

* Două plane: *a)* se pot intersecta după o linie dreaptă, *b)* pot fi paralele, *c)* pot coincide.

---

*) Vezi şi nota dela pag. 13.

CAP. I.

EXERCIŢII.

1. *Să se dea exemple de suprafeţe plane şi de suprafeţe neplane.*

2. *Să se facă din carton o suprafaţă cilindrică şi o suprafaţă conică.*

3. *O masă are patru picioare neegale; câte plane se pot duce prin extremităţile acestor picioare?*

R.: Prin trei din extremităţile celor patru picioare, trece un *singur* plan; în total se pot duce patru plane.

4. *Să se dea exemple, de pe obiectele înconjurătoare, de drepte care:* a) *înţeapă un plan;* b) *sunt paralele cu un plan;* c) *sunt conţinute într'un anumit plan.*

5. *Să se dea exemple de pe obiectele înconjurătoare, de drepte care:* a) *se 'ntâlnesc;* b) *sunt paralele;* c) *nu se 'ntâlnesc în spaţiu.*

6. *Aceeaşi chestiune pentru plane care:* a) *se intersectează;* b) *sunt paralele;* c) *confundate.*

7. *Se cere să se execute din sârmă, sfoară, carton, tablă, beţe subţiri de lemn, plastilină, etc. principalele figuri relative la plane, drepte şi plane, plane şi plane, etc.*

CAP. II.

DREPTE ŞI PLANE PARALELE.

Exemple. 1. Muchia AB a tavanului este paralelă cu muchia CD a planului P al podelei (fig. 51).

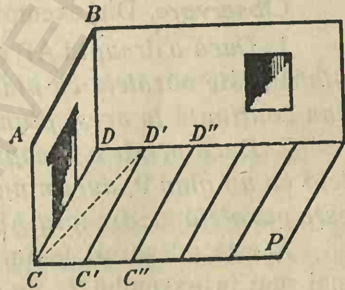


Fig. 51.

Oricât de mult am prelungi muchia AB, ea nu va întâlni planul P al podelei.

Tot astfel, muchia AB este paralelă cu grinzile C'D', C''D'', ..., depe podeaua P, care sunt aşezate paralel cu muchia CD.

Dacă pe podeaua P, aşezăm o stinghie dreaptă, în poziţia CD', *neparalelă* cu muchia CD, dreapta CD' nu va fi paralelă nici cu muchia AB.

Rezultă de aci că dreapta AB din spaţiu poate fi paralelă cu oricât de multe drepte CD, C'D', ..., paralele între ele şi situate în acelaş plan. P.

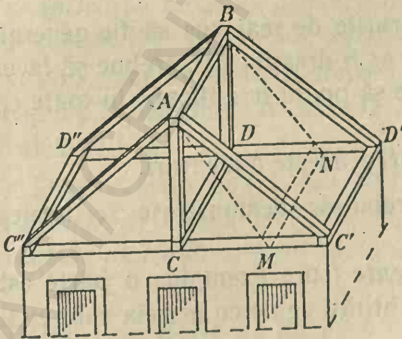


Fig. 52.

2. Pentru a acoperi o clădire în formă de paralelipiped, putem proceda şi astfel (fig. 52).

În planul C'D'D''C'' al podului, punem o grindă de lemn CD paralelă cu zidurile C'D', C''D'' şi facem un cadru dreptunghiular de lemn CDBA pe care'l aşezăm în picioare, astfel ca muchiile AC şi BD să fie verticale (să aibă direcţia firului cu plumb; vezi şi pag. 35).

Coama AB este paralelă cu grinda CD din planul P al podului.

Oricât de mult am prelungi coama AB, ea nu întâlneşte planul C′D′ D″C″ al podului.

Coama AB *este paralelă* şi cu marginile C′D′, C″D″ ale zidurilor.

Coama AB *nu este paralelă* cu orice dreaptă din planul C′D′D″C″ spre exemplu cu CD′, dar este paralelă cu *orice dreaptă* MN, care este paralelă cu CD.

Să mai observăm că prin coama AB şi muchiile C′D′, C″D″ trece câte un plan; tot aşa coama AB şi dreapta MN || CD, determină un plan.

Toate aceste plane, duse prin coama AB, *paralelă* cu planul P, întâlnesc acest plan după o dreaptă paralelă cu AB.

Observare. Din exemplele 1 şi 2 reiese că:

1. *Dacă o dreaptă* AB *este paralelă cu o dreaptă* CD *dintr'un plan* P, *este paralelă cu planul (spre exemplu* AB || CD *din plan) sau conţinută în acest plan* (C′D′ sau C″D″ paralele cu CD).

2. *Dacă printr'o dreaptă* AB, *despre care ştim că este paralelă cu un plan* P, *ducem un alt plan, intersecţia acestor plane este paralelă cu dreapta* AB.

Aceste adevăruri le-am *constatat* pe exemplele practice de mai sus; în exemplul 2., cu acoperişul, ca să dovedim că planul C′D′ D″C″ este paralel cu coama AB, ar trebui să prelungim această coamă şi planul C′D′D″C″ al podului foarte mult, *ceeace în realitate nu putem face.*

Dar chiar dacă am reuşi, ar trebui pentru alte cazuri să procedăm la fel.

Rezultă că pentru ca adevărurile de mai sus să fie generale, *oricare* ar fi planul P şi *oricare* ar fi dreapta AB, trebue să facem o judecată (un raţionament) care să poată fi aplicată în toate cazurile de acelaş fel.

De aci, nevoia de a *demonstra* aceste adevăruri.

Definiţie. Adevărurile ce trebuiesc demonstrate se numesc *teoreme.*

Adevărurile care sunt *evidente* (spre exemplu: o parte este mai mică decât întregul, două cantităţi egale cu a treia sunt egale între ele etc.) se chiamă *axiome.*

Teorema I. *O dreaptă, nesituată într'un plan şi care este paralelă cu o dreaptă din acel plan, este paralelă cu planul.*

Fie dreapta AB, paralelă cu dreapta CD, conţinută în planul P (fig. 53).

Dreptele AB şi CD fiind paralele, determină un plan Q; singurele puncte *comune* planelor P şi Q sunt situate pe dreapta CD.

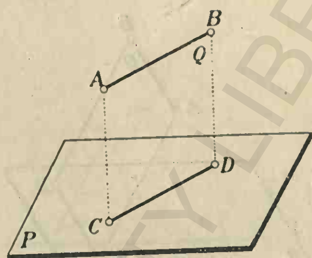


Fig. 53.

Dacă dreapta AB ar întâlni planul P într'un punct E, acest punct situat pe AB ar fi şi în planul Q; deci punctul E ar fi comun planelor P şi Q, adică punctul E s'ar găsi pe dreapta CD.

Rezultă de aci că punctul E ar fi situat şi pe dreapta AB şi pe dreapta CD, ceeace nu se poate, deoarece aceste drepte ni s'au dat paralele.

Observare. In fig. 53, dreapta AB paralelă cu dreapta CD din planul P, *este paralelă cu planul P.*

In fig. 54, dreapta AB, paralelă cu dreapta CD din planul P, este situată în acest plan.

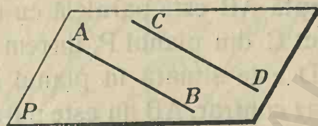


Fig. 54.

În baza acestei observări, teorema precedentă se poate enunţa şi astfel:

O dreaptă paralelă cu o dreaptă dintr'un plan este paralelă cu planul sau aşternută pe acest plan.

Aplicaţie. Se dă un plan P şi un punct A exterior (vezi fig. 53), prin care se cere să se ducă o paralelă la planul P.

Vom duce în planul P, după voie, o dreaptă CD; punctul A şi dreapta CD determină un plan Q. În acest plan Q, ducem prin A o paralelă la CD.

Deoarece dreapta CD a fost dusă *după voie* în planul P, rezultă că: *printr'un punct* A, *exterior unui plan* P, *putem duce oricât de multe drepte paralele cu acest plan.*

Teorema II. Se dă un plan P *şi o dreaptă* AB *paralelă cu acest plan. Dacă prin dreapta* AB *ducem un plan oarecare* Q, *intersecţia dintre planele* Q *şi* P *este o dreaptă paralelă cu dreapta* AB.

Fie CD intersecţia dintre planele P şi Q; (fig. 55) dacă dreapta AB ar întâlni dreapta CD, ar însemna că AB ar întâlni şi planul P, în care CD este conţinută; aceasta nu se poate, deoarece s'a dat că AB || P.

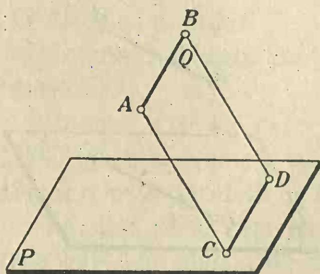


Fig. 55.

Dacă AB, *care este în acelaş plan* Q *cu* CD, nu întâlneşte dreapta CD, înseamnă că este paralelă cu ea. Aceasta voiam să demonstrăm.

Consecinţe. 1. *Fie o dreaptă* AB *paralelă cu un plan* P; *dacă printr'un punct* C *din planul* P, *ducem o paralelă* CD *la* AB, *această paralelă* CD *este situată în planul* P.

Intr'adevăr: planul Q determinat de dreapta AB şi punctul C taie planul P după o dreaptă, care, în baza teoremei *II*, este paralelă cu dreapta AB; această dreaptă este chiar CD, deoarece prin punctul C nu putem duce la AB o altă paralelă decât CD.

Observare. Această consecinţă este foarte utilă în aplicaţiuni, deoarece pentru a verifica dacă o dreaptă AB este paralelă cu un plan P, procedăm astfel: printr'un punct C din planul P, ducem o paralelă CD cu AB. Dacă dreapta CD este situată în planul P, atunci AB este paralelă cu planul; în caz contrar, AB nu este paralelă cu planul P.

2. *Fie două plane* P *şi* Q, *care se intersectează după dreapta* CD; *dacă o dreaptă oarecare* AB *este paralelă cu fiecare din planele* P *şi* Q, *atunci ea este paralelă şi cu intersecţia lor* CD (fig. 56).

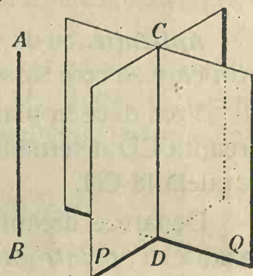


Fig. 56.

Într'adevăr, prin punctul C, comun celor două plane P şi Q să ducem o dreaptă paralelă cu AB; în baza consecinţei 1, această paralelă va fi situată şi în planul P şi în planul Q, deci va fi chiar dreapta CD, intersecţia planelor P şi Q.

Teorema III. *Dacă două drepte sunt paralele cu o a treia sunt paralele şi între ele.*

Fie dreptele CD şi C'D' (fig. 57) paralele cu dreapta AB; să dovedim că CD este paralelă cu C'D'.

Printr'un punct C′ al dreptei C′D′ şi prin dreapta CD, ducem un plan P, care este paralel cu dreapta AB (în baza teoremei *I*). Dreapta C′D′ fiind paralelă cu AB, va fi conţinută în planul P (în baza consecinţei 1). Dreptele CD şi C′D′ fiind situate în acelaş plan P sunt paralele, deoarece altfel, ele s'ar întâlni într'un punct. Ori prin acest punct, ar urma să treacă două drepte CD şi C′D′ paralele cu o aceeaşi dreaptă AB, ceeace nu se poate (este contrar cu *postulatul lui Euclid).* Urmează că CD este paralelă cu C′D′.

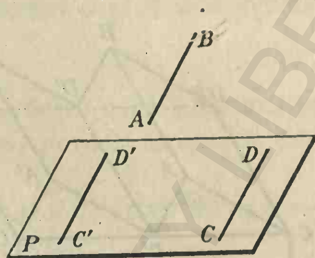


Fig. 57.

Observare. Din cele ce preced rezultă că fiind dat un plan P şi o dreaptă AB || P: *planele* Q, Q′, Q″, ... , duse prin AB, intersectează planul P după drepte paralele CD || C′D′ || C″D″, ..., (fig. 58).

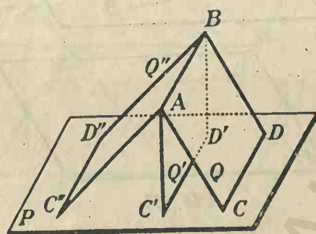


Fig. 58.

Într'adevăr, în baza teoremei *II*, CD || AB, C′D′ || AB, C″D″ || AB,. . . ., ori, dreptele CD, C′D′, C″D″,. . . ., fiind paralele cu *aceeaşi* dreaptă AB, sunt paralele şi între ele (vezi teorema *III*).

Reciproc. Dacă prin două drepte CD || C′D′ din acelaş plan P ducem, câte un plan Q şi Q′ *care să se taie,* intersecţia lor AB este paralelă cu planul P.

Exemple. 1. Planele P şi Q ale unei scări duble, au muchia comună AB paralelă cu planul pe care se sprijină scara (fig. 59).

Dreptele CD şi C′D′, care unesc picioarele fiecăreia din cele două părţi ale scării, sunt paralele între ele (vezi teorema *III*. Observare).

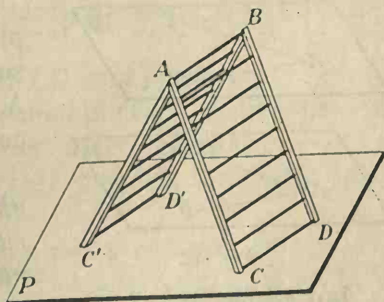


Fig. 59.

2. Dacă prin muchiile paralele CD şi C′D′, situate în planul P (planul podului unei clădiri), ducem planele CD BA şi C′D′ BA

care să se taie, coama AB a acoperişului este paralelă cu planul CDD'C' al podului (vezi reciproca de mai sus [1]) (fig. 60).

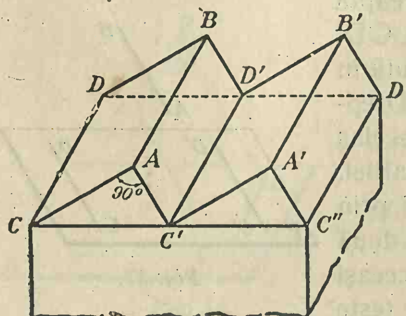


Fig. 60.

Teoremă. *Dacă printr'un punct exterior unui plan ducem două drepte paralele cu acel plan, planul determinat de aceste drepte este paralel cu planul dat.*

Fie AB şi AC două drepte, care trec prin punctul A, exterior planului P; voim să dovedim că planul Q, determinat de aceste drepte, este paralel cu planul P (fig. 61).

Să presupunem că planele P şi Q n'ar fi paralele, ci s'ar întâlni după o dreaptă D; această dreaptă, fiind situată în planul Q, trebuie să întâlnească neapărat una din dreptele AB şi AC, deoarece într'un plan o dreaptă nu poate fi paralelă de o dată cu două drepte concurente.

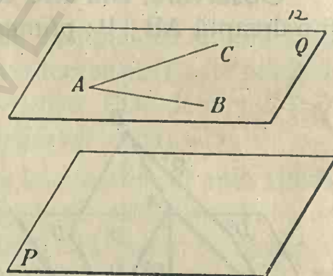


Fig. 61.

În acest caz, ar urma ca una din dreptele AB şi AC să întâlnească şi planul P, deoarece dreapta D se află şi în acest plan.

Ori aceasta nu se poate, dreptele AB şi AC fiind paralele cu planul P.

Rezultă că planele P şi Q sunt paralele.

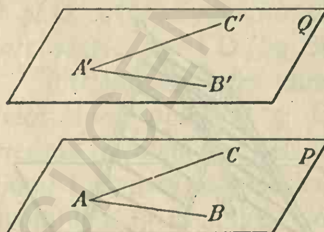


Fig. 62.

Consecinţe. 1. Pentru a duce un plan paralel cu un plan dat P, este suficient să ducem printr'un punct A, două drepte AB şi AC paralele cu acest plan (fig. 61).

2. *Planele* P *şi* Q *a două unghiuri* BAC, B'A'C', *care au laturile paralele două câte două, sunt paralele* (fig. 62).

Într'adevăr, fiecare din aceste plane conţine două drepte paralele cu celălalt plan.

[1]) Cu acoperişuri de forma din fig. 60, se acoperă clădirile ce servesc ca ateliere şi se numesc „în dinţi de ferăstrău".

3. Dacă printr'un punct A exterior unui plan, ducem drepte paralele cu un plan dat, toate aceste drepte sunt situate într'un plan paralel cu P, dus prin A.

Acest rezultat se exprimă şi astfel:

Locul geometric al dreptelor, care trec printr'un punct şi sunt paralele cu un plan dat, este planul paralel cu acesta, dus prin punctul considerat.

Teoremă. *Dacă tăiem două plane paralele printr'un al treilea plan, dreptele de intersecţie sunt paralele.*

Fie planele paralele P şi Q, tăiate de un al treilea plan R, după dreptele AB şi CD. Voim să dovedim că aceste drepte sunt paralele (fig. 63).

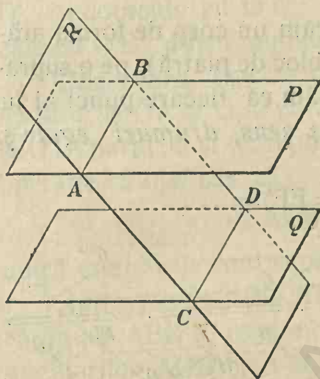


Fig. 63.

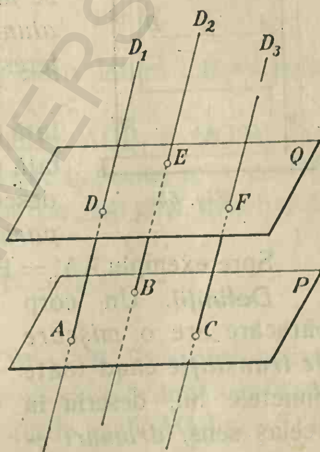


Fig. 64.

Dreptele AB şi CD sunt situate în acelaş plan R, şi dacă nu ar fi paralele, s'ar întâlni într'un punct, care ar fi comun şi planelor P şi Q. Dar aceasta este contrar ipotezei, planele P şi Q fiind paralele.

Urmează deci că dreptele AB şi CD sunt paralele.

Exemple. Planul plafonului şi planul podelei sunt paralele; intersecţiile lor cu planele pereţilor sunt drepte paralele.

Teoremă. *Segmentele de drepte paralele, cuprinse între plane paralele sunt egale.*

Fie planele paralele P şi Q (fig. 64) şi dreptele paralele D_1, D_2, D_3, care le întâlnesc respectiv în punctele A, B, C, şi D, E, F.

Voim să arătăm că:

$$AD = BE = CF$$

Să observăm că dreptele D_1 şi D_2 determină un plan, care în

baza teoremei precedente va tăia planele P şi Q după dreptele paralele AB şi DE; urmează că figura ABED este un paralelogram, deci AD = BE. In mod analog se poate arăta că BE = CF.

Exemplu. Muchiile pereţilor unei camere sunt egale, ca paralele cuprinse între plane paralele: plafonul şi podeaua (fig. 51).

Mişcare de translaţie.

Exemple. 1. Când tragem storul (sau oblonul) unei ferestre, fiecare punct al storului (sau oblonului) descrie *drumuri egale şi paralele* (fig. 65).

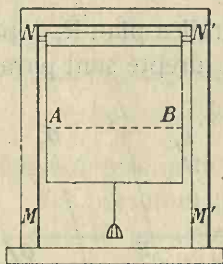


Fig. 65.

O linie orizontală AB, desenată pe stor, se mişcă paralel cu ea, iar extremităţile ei *alunecă* pe marginile *fixe* MN, M'N' ale ferestrei (fig. 65).

2. Dacă mişcăm un corp de forma arătată în fig. 66 (un bloc de piatră), pe o suprafaţă plană, observăm că fiecare punct al lui descrie, *în acelaş sens, drumuri egale şi paralele.*

Spre exemplu AA' = BB' = ... = FF' = ...

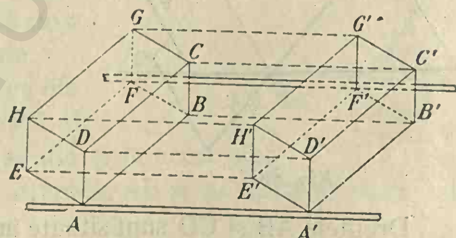


Fig. 66.

Definiţii. Un corp oarecare are o *mişcare de translaţie* când toate punctele lui, descriu în acelaş sens, *drumuri egale şi paralele.*

Direcţiunea, paralel cu care se mişcă punctele corpului, se numeşte *direcţiunea de translaţie;* în exemplul 1, direcţia de translaţie este aceea a marginilor ferestrei; în exemplul 2, direcţia AA'.

Lunecătoare fixe sunt liniile fixe pe care alunecă punctele figurii care se translatează. In exemplul 1, lunecătoare fixe sunt marginile MN, M'N' ale ferestrei; în exemplul 2, lunecătoare fixe sunt spre exemplu două stinghii de lemn AA', FF' dealungul cărora tragem corpul.

Lunecătoare mobile sunt liniile unei figuri în mişcare de translaţie, care se sprijină pe una (sau mai multe) lunecătoare fixe. In exemplul 1 sau 2, dreapta AB este una din lunecătoarele mobile.

Teoremă. Două unghiuri nesituate în acelaş plan şi care au laturile paralele, sunt sau egale sau suplimentare.

Fie unghiurile AOB şi A′O′B′, situate în plane diferite şi astfel că laturile AO şi A′O′ de o parte, BO şi B′O′ de altă parte, sunt *paralele şi îndreptate în acelaş sens* (fig. 67); să dovedim că unghiurile AOB şi A′O′B′ sunt egale.

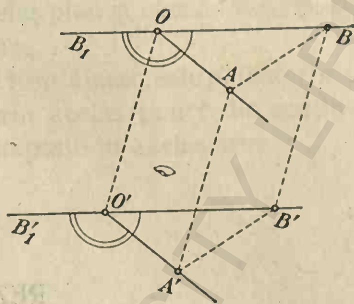


Fig. 67.

Să dăm unghiului AOB o translaţie, paralel cu linia OO′, care uneşte vârfurile unghiurilor (adică să luăm pe OO′ ca *lunecătoare fixă*, iar OA şi OB ca *lunecătoare mobile*.

Dreapta OA fiind paralelă cu O′A′, când punctul O va veni în O′, va coincide cu O′A′; pentru acelaş motiv latura OB va coincide cu O′B′, adică unghiurile AOB = A′O′B.

Observare. Dacă s'ar fi dat unghiurile AOB_1 şi A′O′B′, care au laturile OA şi O′A′ paralele şi îndreptate în acelaş sens, iar OB_1 şi O′B′ paralele şi îndreptate în sens contrar, am găsi prin aceeaş operaţie ca mai sus, că:

$$\sphericalangle AOB_1 + \sphericalangle A'O'B' = 180^0$$

adică unghiurile sunt suplimentare.

Aplicaţie. Se ia (fig. 67) OA=O′A′, OB=O′B′. Să se demonstreze că figura ABB′A′ este un paralelogram şi să se deducă egalitatea unghiurilor AOB şi A′O′B′ din triunghiurile egale AOB şi A′O′B′.

Unghiul a două drepte, care nu se întâlnesc, *este prin definiţie unghiul a două drepte care trec prin acelaş punct din spaţiu şi sunt paralele cu dreptele date* şi îndreptate în acelaş sens.

Fie dreptele D şi D′, care *nu se întâlnesc* (deci nu sunt în acelaş plan), (fig. 68); printr'un punct A ales după voie în spaţiu, ducem AB ∥ D şi AC ∥ D′; unghiul BAC este unghiul dreptelor D şi D′; (Acelaş unghiu îl obţinem luând un punct A′ pe dreapta D şi ducând A′C′ ∥ D′, sau luând un punct A″ pe dreapta D′ şi ducând A″B′ ∥ D.

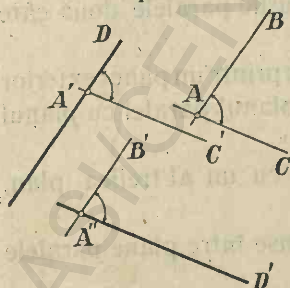


Fig. 68.

Dacă unghiul a două drepte care nu se întâlnesc este *drept*, acele drepte sunt *perpendiculare* sau *ortogonale*.

Exemple. In fig. 51 muchia DB dintre doi pereţi este *perpendiculară* pe muchia CD dintre podea şi perete.

REZUMAT.

CAP. II. DREPTE ŞI PLANE PARALELE.

* O dreaptă este paralelă cu un plan când nu întâlneşte planul (se mai spune: când întâlneşte planul *foarte* departe, la infinit).

* O dreaptă, care este paralelă cu o altă dreaptă dintr'un plan, este paralelă cu acest plan sau este conţinută în el.

* Un plan dus printr'o dreaptă paralelă cu un plan dat, — taie acest plan după o dreaptă paralelă cu dreapta prin care s'a dus planul.

* O dreaptă, care este paralelă cu două plane care se taie, este paralelă şi cu dreapta de intersecţie a acestor plane.

* Două drepte, care sunt paralele cu o a treia dreaptă, sunt paralele şi între ele.

* Pentru a duce printr'un punct exterior unui plan dat, un plan paralel cu acesta, ducem prin acel punct două drepte paralele cu planul dat.

* Planele a două unghiuri, care au laturile paralele două câte două, sunt paralele.

* Locul geometric al dreptelor, care trec printr'un punct exterior unui plan dat şi sunt paralele cu el, este planul paralel cu planul dat, dus prin punctul considerat.

* Intersecţiile a două plane paralele cu un al treilea plan, sunt paralele între ele.

* Segmentele de drepte paralele cuprinse între plane paralele sunt egale.

* Un corp are o *mişcare de translaţie*, când toate punctele lui, descriu în acelaş sens, *drumuri egale şi paralele*.

Lunecătoare fixe sunt liniile pe care alunecă punctele figurii

care se translatează; *lunecătoare mobile* sunt liniile figurii în mişcare şi ale cărei puncte se sprijină pe lunecătoarele fixe.

* Două unghiuri nesituate în acelaş plan şi care au laturile paralele, sunt sau egale sau suplimentare.

* Unghiul a două drepte care nu se întâlnesc, este *prin definiţie* unghiul a două drepte care trec prin acelaş punct din spaţiu şi sunt paralele cu dreptele date şi îndreptate în acelaş sens.

EXERCIŢII

1. *Să se dea trei exemple, din obiectele înconjurătoare, de drepte paralele cu un plan.*

2. *Să se dea un exemplu, din obiectele înconjurătoare, din care să reiasă că :*

a) *Planul dus printr'o dreaptă paralelă cu un plan, taie acest din urmă plan după o dreaptă paralelă cu dreapta considerată ;*

b) *O dreaptă paralelă cu două plane care se taie, este paralelă cu dreapta lor de intersecţie.*

3. *Să se construiască din carton, chibrituri, sârmă etc :* a) *drepte paralele cu un plan ;* b) *un plan ce trece printr'o dreaptă paralelă cu un plan dat, etc.*

4. *Să se dea exemple de unghiuri, ale căror laturi sunt paralele cu un plan dat.*

5. *Să se dea exemple, din obiectele înconjurătoare, din care să se vadă că:* a) *intersecţiile dintre două plane paralele cu un al treilea plan, sunt drepte paralele ;* b) *segmentele de drepte paralele, cuprinse între plane paralele, sunt egale.*

6. *Să se dea exemple de mişcări de translaţie şi să se arate care sunt lunecătoarele fixe şi care, lunecătoarele mobile.*

7. *Să se dea exemple de : drepte concurente, paralele şi de drepte care nu se întâlnesc.*

8. *Exemple de unghiuri a două drepte, care nu se întâlnesc în spaţiu, şi de modul în care putem afla acest unghiu.*

9. *Să se dea exemple de două drepte, care nu se întâlnesc în spaţiu şi care sunt perpendiculare ca direcţie.*

10. *Cum putem verifica, dacă două drepte, care nu se întâlnesc, sunt perpendiculare ca direcţie ?*

CAP. III.

DREAPTĂ PERPENDICULARĂ PE UN PLAN.

Exemplu. Muchia verticală AB, dintre doi pereţi ai unei camere (fig. 69), este perpendiculară pe cele două muchii AC şi AD dintre podea şi pereţi.

Se poate constata că orice dreaptă AE am desena pe podea, astfel ca ea să treacă prin colţul A al camerii, face un unghiu drept cu muchia verticală.

Rezultă de aci că muchia verticală, care este perpendiculară *pe două* drepte din planul podelei (muchiile AC şi AD), este perpendiculară *pe toate* dreptele din acest plan şi care trec prin piciorul ei.

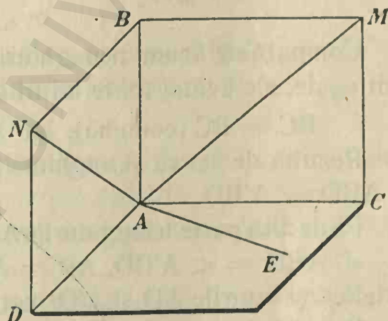


Fig. 69.

Nu tot astfel se petrece spre exemplu cu dreapta AM, care este perpendiculară pe *o singură* dreaptă AD din planul podelei; ea nu este perpendiculară şi pe alte drepte din acest plan.

Aceste proprietăţi *verificate* pe un caz particular, sunt adevărate în cazul general al unui plan oarecare; pentru a dovedi aceasta, *să demonstrăm:*

Teoremă. *Dacă o dreaptă este perpendiculară pe două drepte neparalele dintr'un plan, ea este perpendiculară pe orice dreaptă din acel plan.*

Fie dreapta AO, perpendiculară *prin ipoteză* pe două drepte OB şi OC din planul dat P (fig. 70). Voim să demonstrăm că OA este perpendiculară pe *orice* dreaptă OD din acest plan.

Să prelungim în acest scop dreapta AO, dincolo de plan,

luând pe prelungirea ei, dela punctul de intersecţie O al dreptei cu planul, segmentul OA′ = OA.

Să ducem apoi în planul P o dreaptă oarecare, ce taie dreptele OB, OC, OD în punctele B, C şi D; unind aceste puncte cu punctele A şi A′ se formează mai multe triunghiuri.

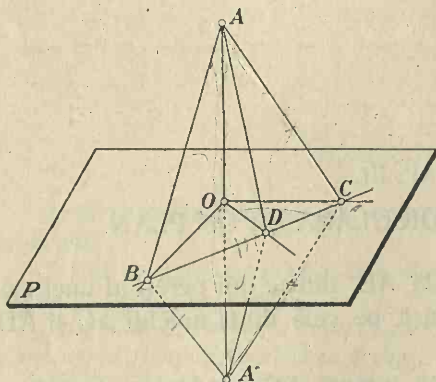


Fig. 70.

Observăm că în triunghiul ACA′, dreapta CO este perpendiculară pe AOA′, iar laturile AC şi CA′ sunt egale, —ca oblice ale căror picioare A şi A′ sunt egal depărtate de piciorul O al perpendicularei, — adică AC = CA′; tot astfel, din triunghiul ABA′, găsim AB = A′B.

Comparând acum triunghiurile ABC şi A′BC constatăm că sunt egale, ele având toate laturile egale două câte două:

BC = BC (comună), iar AB = A′B, AC = A′C.

Rezultă de aci că şi unghiurile lor vor fi egale, spre exemplu: $\measuredangle$ ABD = A′BD.

Pe de altă parte triunghiurile ABD şi A′BD sunt egale, ca având:

$\measuredangle$ ABD = $\measuredangle$ A′BD, AB = A′B şi BD = BD (comună)

astfel că şi laturile AD şi A′D′ vor fi egale.

Rezultă de aci că triunghiul ADA′ este isoscel, deci dreapta DO, care uneşte vârful lui cu mijlocul bazei AA′ va fi perpendiculară pe bază, adică AO ⊥ OD, ceeace voiam să demonstrăm.

Observare. În demonstraţia de mai sus, dreptele OB şi OC au fost duse prin punctul O, în care dreapta AO întâlneşte planul; teorema este însă adevărată chiar dacă *dreptele*, pe care OA este perpendiculară, nu trec prin punctul O, aşa precum se arată de altfel în enunţul ei; într'adevăr, fie dreptele *neparalele* D şi D′ din planul P (fig. 71); ducând prin O, OB ∥ D şi OC ∥ D′, dreapta

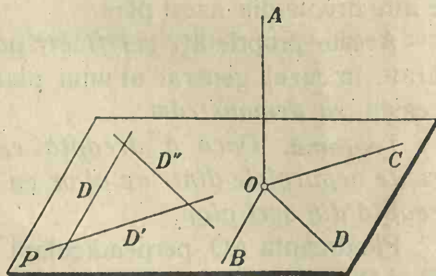


Fig. 71.

OA, care prin ipoteză este perpendiculară pe dreptele D şi D′, va fi perpendiculară şi pe paralelele lor OB şi OC (vezi pag. 29); tot astfel, OA este perpendiculară pe dreapta OD, paralelă cu o a treia dreaptă D″ oarecare din planul P.

Definiţie. O dreaptă, care este perpendiculară pe toate dreptele dintr'un plan, se numeşte perpendiculară pe acel plan; se mai poate zice şi invers: *planul este perpendicular pe dreaptă.*

Importanţa teoremei precedente este şi următoarea: când voim a *verifica* sau când trebuie *să demonstrăm* că o dreaptă este perpendiculară pe un plan, este suficient să *verificăm* sau să *demonstrăm* că ea este perpendiculară pe *două drepte neparalele* din acel plan, deoarece în acel caz, dreapta este perpendiculară pe *orice* altă dreaptă din acel plan.

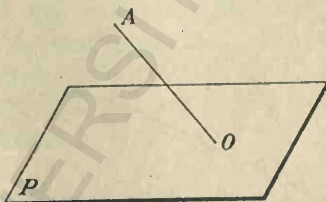


Fig. 72.

O dreaptă care întâlneşte un plan şi nu este perpendiculară pe el, se chiamă *oblică* pe acel plan; spre exemplu dreapta OA (fig. 72), este oblică pe planul P.

Verticală. Plan orizontal.

Exemplu. Orice dreaptă D, paralelă cu direcţia unui fir atârnat, care are la capătul de jos o greutate (firul cu plumb), este perpendiculară pe un plan P paralel cu suprafaţa *plană* a unei ape liniştite.

Planele paralele cu suprafaţa plană a unei ape liniştite, se numesc *plane orizontale*, iar dreptele perpendiculare pe un plan orizontal (sau paralele cu direcţia unui fir cu plumb atârnat de un capăt) (fig. 73), se chiamă *drepte verticale.*

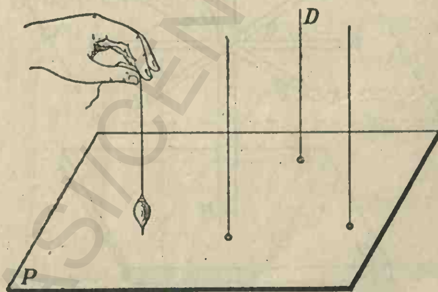


Fig. 73.

Exemplu. Să privim fig. 69, care reprezintă o cameră în formă de paralelipiped dreptunghiu; dacă în punctul A al muchiei AC dintre un perete şi podea, ridicăm pe AC perpendicularele AB, AD, AN,......, observăm că toate aceste drepte se găsesc în planul ABND al peretelui şi acest plan este perpendicular pe muchia AC.

Să demonstrăm:

Teoremă. Perpendicularele ridicate într'un punct al unei drepte, sunt cuprinse în acelaş plan, perpendicular pe dreapta considerată.

Fie dreapta AO şi perpendicularele OB, OC, OD, în punctul O al ei (fig. 74). Prin dreptele OB şi OC ducem planul P, care conţinând două drepte OB, OC perpendiculare pe OA, este perpendicular pe dreapta OA (vezi teorema pag. 33); să arătăm că acest plan conţine şi dreapta OD.

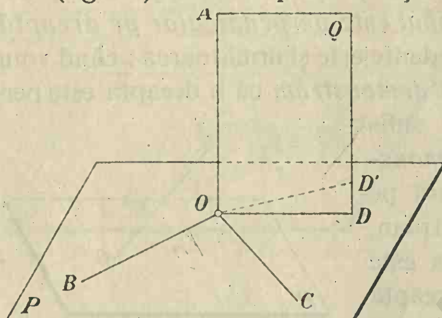


Fig. 74.

Dreptele OA şi OD determină un plan Q; în ipoteza că dreapta OD nu ar fi cuprinsă şi ea în planul P, ar rezulta că planele P şi Q s'ar intersecta după o dreaptă OD′, care ar fi perpendiculară pe OA, deoarece această dreaptă, fiind perpendiculară pe planul P, este perpendiculară pe orice dreaptă din acest plan. In acest caz, ar urma că în planul Q, există două perpendiculare pe dreapta OA în punctul O: OD şi OD′, ceeace nu se poate.

Rezultă că dreapta OD, trebue să fie şi ea în planul P.

Dreapta OD fiind o perpendiculară oarecare pe OA, reiese că *orice* perpendiculară în punctul O pe OA, se găseşte în planul P, perpendicular pe AB.

Observare. Teorema de mai sus se exprimă şi astfel:

Locul geometric al tuturor perpendicularelor duse pe o dreaptă într'un punct al ei, este un plan perpendicular pe dreaptă în acest punct.

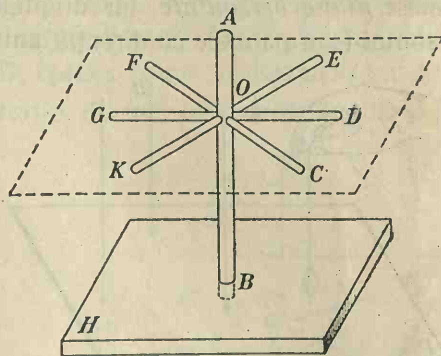


Fig. 75.

Aplicaţie. Fie o vergea de lemn AB (fig. 75), fixată *vertical* în B pe un plan orizontal H; într'un punct oarecare O al ei, să fixăm diferite vergele OC, OD, OE. . . . , paralele cu planul orizontal H; conform teoremei precedente, toate aceste vergele

orizontale, fiind perpendiculare pe verticala OA, sunt situate într'un plan orizontal H′ perpendicular pe dreapta AB.

Exemplu. Braţele unei morişti hidraulice (moulinet) sunt situate într'un plan perpendicular pe axa moriştii.

Teoremă. Printr'un punct din spaţiu se poate duce un plan perpendicular pe o dreaptă şi numai unul singur.

Deosebim cazurile :

a) Punctul O se află chiar pe dreaptă (fig. 74).

În acest caz, să ducem în O două drepte OB şi OC perpendiculare pe dreapta OA ; aceste drepte determină un plan perpendicular pe OA. Un alt plan perpendicular pe OA în punctul O şi diferit de P nu se poate duce ; într'adevăr, potrivit teoremei (pag. 36), acel plan ar trebui să conţină toate perpendicularele ce se pot duce în O pe OA, deci şi pe OB şi OC, adică s'ar confunda cu planul P.

b) Punctul O este exterior dreptei (fig. 76).

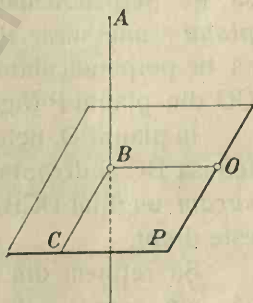


Fig. 76.

În planul determinat de dreapta AB şi punctul O, ducem perpendiculara OB pe AB, iar în B ridicăm o perpendiculară BC pe planul ABO.

Dreptele OB şi BC, determină un plan P perpendicular pe AB în B; acesta este singurul plan perpendicular, care se poate duce din O pe dreapta AB, deoarece din O nu se poate duce decât o singură perpendiculară OB ⊥ AB, iar dreptele OB şi BC determină un singur plan P.

In cele de mai sus s'a dovedit că fiind dat *un punct şi o dreaptă*, putem duce prin punct un plan perpendicular pe dreaptă şi numai unul singur.

Dacă s'ar da un *punct şi un plan*, se poate dovedi că prin acel punct se poate duce o dreaptă perpendiculară pe acel plan şi numai una singură.

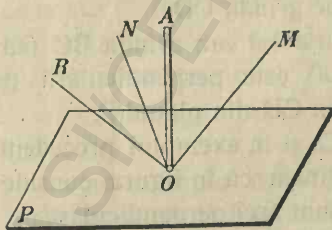


Fig. 77.

În acest scop, să se facă aplicaţiile următoare:

1. Punctul O este în planul P. Pe o masă orizontală P (fig. 77.) să înfigem un ac în punctul O din plan; acest ac poate ocupa diferite poziţii OA, OM, ON, OR, ... ; găsim însă, că într'o singură poziţie OA, *verticală*, acul este perpendicular pe două drepte oarecari din plan, adică pe planul P.

2. *Punctul* O *este exterior* (fig. 78) *planului* P. Repetăm experienţa de mai sus, înfigând un ac O'A perpendicular pe planul P al mesei, într'un punct oarecare O' al acesteia; mişcăm apoi masa astfel ca ea să rămână orizontală şi până ce acul trece prin punctul O; acest lucru îl putem face într'un singur fel, adică din O putem coborî o singură perpendiculară pe planul P.

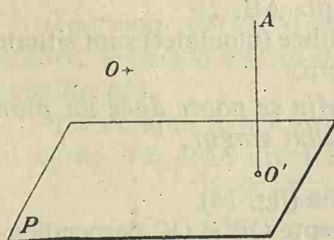


Fig. 78.

Teorema celor trei perpendiculare.

Exemple. 1. Să aşezăm un echer ABC, astfel încât cateta AB să fie perpendiculară pe suprafaţa *plană* a unei mese P, iar cateta AC să fie perpendiculară pe o dreaptă CD din planul P (fig. 79).

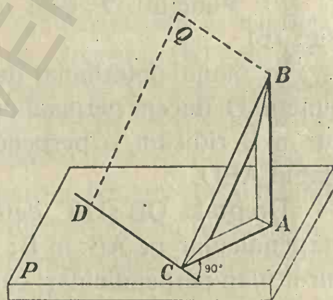


Fig. 79.

În planul Q, determinat de ipotenusa BC şi dreapta CD, dacă *măsurăm* unghiul DCB, constatăm că este drept.

Să reţinem din acest exemplu că: am aşezat echerul astfel ca: 1. Dreapta AB ⊥ planul P; 2. Dreapta AC ⊥ dreapta DC; iar prin măsurare am aflat că şi *dreapta* BC *este perpendiculară pe* DC.

2. Construcţia unui acoperiş se face (fig. 80) aşezând stâlpul AB perpendicular pe planul P al podului, grinda AC perpendiculară pe grinda CD.

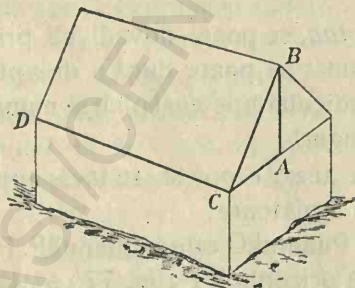


Fig. 80.

În acest caz grinda BC (căpriorul) este perpendiculară pe muchia CD din planul P.

Ca şi in exemplul precedent, să reţinem că în figura considerată sunt *trei* perpendiculare: 1. AB ⊥ P; 2. BC ⊥ DC şi 3. AC ⊥ CD.

Aceste observări ne conduc la:

Teorema celor trei perpendiculare. *Să considerăm o perpendiculară* AB *pe un plan* P (fig. 81); *din piciorul* B *al acestei*

perpendiculare să ducem o perpendiculară BC *pe o dreaptă oarecare* CD *din planul* P*; să demonstrăm că dreapta* AC, *care uneşte piciorul* C *al acestei din urmă perpendiculare cu un punct oarecare* A *al primei perpendiculare, este perpendiculară pe dreapta* CD.

Intr'adevăr: dreapta AB fiind perpendiculară pe planul P, este perpendiculară pe orice dreaptă din acest plan, deci (ca direcţie) şi pe dreapta CD; pe de altă parte, prin construcţie, CD este perpendiculară pe dreapta BC.

Rezultă că dreapta CD fiind perpendiculară pe două drepte AB şi BC din planul ABC, va fi perpendiculară pe acest plan, deci şi pe dreapta AC din acest plan, adică tocmai ceeace voiam să demonstrăm.

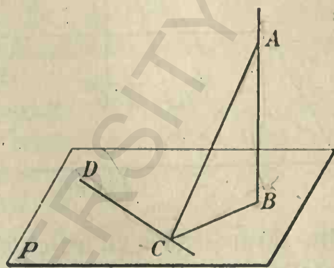


Fig. 81.

Observări. 1. Numele de *teorema celor trei perpendiculare*, se trage din împrejurarea că intervin trei perpendiculare: AB ⊥ P; BC ⊥ CD şi CD ⊥ AC.

2. Pentru înlesnirea înţelegerii demonstraţiei teoremei de mai sus, să se refacă raţionamentul folosind un echer ABC, care să joace rolul planului ABC.

Exerciţiu. Să se înfigă pe un carton plan P, două ace AB şi A'B', de aceeaşi lungime, perpendiculare pe acest plan şi să se recunoască că aceste drepte sunt *paralele între ele.*

Se va uni cu sfoară capetele A şi A' de o parte, capetele B şi B' de altă parte, precum şi în cruciş A cu B' şi A' cu B. Se va constata că firele AB' şi A'B' se întretaie, deci figura ABB'A' este în acelaş plan Q, şi anume că este un dreptunghiu.

Se poate deduce de aci următoarea proprietate:

Două drepte perpendiculare pe acelaş plan sunt paralele între ele.

Spre exemplu: doi stâlpi perpendiculari pe planul unei podele plane, sunt paraleli între ei.

Perpendiculare şi oblice duse dintr'un punct pe un plan.

Exemplu. Un stâlp AO este înfipt perpendicular pe o supra-

faţă plană de pământ; pentru a nu fi doborît de vânt, el este susţinut (ancorat) cu sârmele AB, AC, AD,....., (fig. 82).

Se constată că extremităţile B şi C a două sârme *egale* AB = AC, sunt la *aceeaşi distanţă* de piciorul O al stâlpului: BO = CO; iar capătul D al unei sârme mai lungi AD > AB, este mai depărtat de piciorul stâlpului, adică OD > OB.

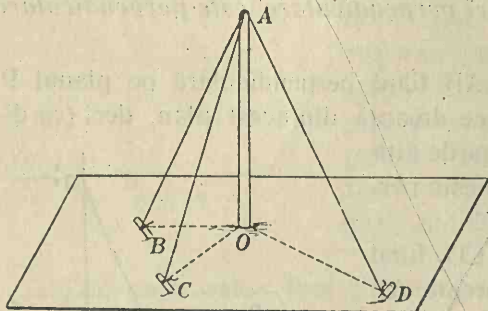


Fig. 82.

Dacă voim să mai ancorăm stâlpul şi cu alte sârme legate cu un căpăt tot în A, constatăm că pentru ca extremităţile lor de pe pământ să fie la *aceeaşi* distanţă OB = OC, trebue să luăm sârme egale cu AB = AC; iar dacă voim ca aceste distanţe să fie mai mari sau mai mici decât OB, va trebui ca şi sârma să fie respectiv mai lungă sau mai scurtă decât sârma AB = AC.

Definiţii. AO este *perpendiculara* coborîtă din A pe plan; AB, AC, AD, . . ., sunt *oblice* pe plan; O este *piciorul* perpendicularei, iar B, C, D, . . ., sunt *picioarele* oblicelor (fig. 83).

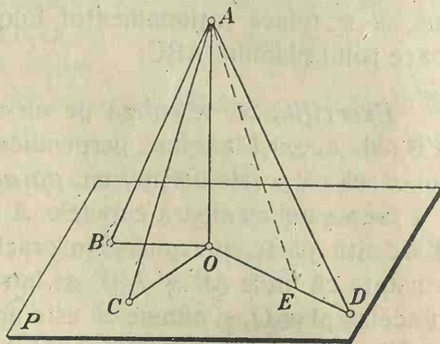


Fig. 83.

Teoremă. Dacă dintr'un punct exterior unui plan, se duce perpendiculara pe acel plan şi mai multe oblice:

a) *perpendiculara este mai scurtă decât orice oblică;*

b) *oblicele egal depărtate de piciorul perpendicularei, sunt egale;*

c) *dintre două oblice, neegal depărtate de piciorul perpendicularei, cea mai depărtată este cea mai lungă.*

a) Fie perpendiculara AO şi oblica AB, pe planul P; în triunghiul BOA, dreptunghiu în O, OA este o catetă, iar AB ipotenusă; prin urmare OA < AB;

b) Fie două oblice AB, AC, egal depărtate de piciorul perpendicularei, adică BO = CO; să dovedim că AB = AC.

Triunghiurile dreptunghice BAO, CAO având două catete respectiv egale (BO = CO şi AO comună) sunt egale; deci şi celelalte elemente sunt egale: AB = AC;

c) Să considerăm două oblice neegal depărtate de piciorul perpendicularei, şi anume OD > OB; voim să dovedim ca AD > AB.

In acest scop, să luăm pe OD, o lungime OE = OB; deoarece prin ipoteză OD > OB = OE, rezultă că punctul E va fi situat între O şi D; iar oblicele OE şi OB sunt egale ca având picioarele E şi B la aceeaşi distanţă de O (vezi *b*).

In planul AOD, avem perpendiculara AO şi două oblice AD · AE; potrivit unei teoreme din Geometria plană, oblica AD este mai mare decât oblica AE, deoarece este mai depărtată de piciorul perpendicularei; adică AD > AE sau AD > AB.

Teorema reciprocă. *Dacă dintr'un punct A, exterior unui plan P, ducem perpendiculara şi mai multe oblice pe acel plan:*

a) *perpendiculara este cea mai scurtă dreaptă dusă din A pe plan* (aceasta în baza teoremei precedente, *a*).

b) *două oblice egale, au picioarele la aceeaşi distanţă de piciorul perpendicularei.*

Intr'adevăr, dacă piciorul uneia ar fi la o distanţă mai mare decât piciorul celeilalte, prima oblică ar fi mai lungă decât cea de a doua (teorema precedentă *c*).

c) *dacă dintre două oblice, una este mai lungă, piciorul ei este mai depărtat de piciorul perpendicularei.*

Dacă nu ar fi astfel, am contrazice teorema precedentă (*c*).

Definiţie. *Distanţa dela un punct la un plan, este lungimea perpendicularei duse din acel punct pe plan.*

In baza teoremelor precedente, rezultă că distanţa dela un punct la un plan, este *cea mai scurtă* depărtare între punctul considerat şi un punct din plan.

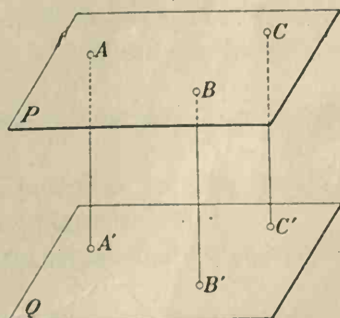


Fig. 84.

Teoremă. *Toate punctele unui plan sunt la aceeaşi distanţă de un plan paralel cu el.*

Fie planele paralele P şi Q, iar A, B, C, trei puncte *oarecare* din planul P, şi fie A′, B′, C′, picioarele perpendicularelor duse din aceste puncte pe planul Q (fig. 84).

Să dovedim că distanţele AA′, BB′, CC′, ... sunt egale.

Perpendicularele de mai sus fiind duse pe acelaş plan Q, sunt paralele (pag. 39) şi segmentele paralele AA′, BB′, CC′, ..., fiind cuprinse între două plane paralele, sunt egale (vezi pag. 27).

Definiţie. Distanţa între două plane paralele, este distanţa dela un punct oarecare al unui plan, la celălalt plan.

Exemplu. Distanţa dintre planul plafonului şi planul podelei este egală cu distanţa dela un punct *oarecare* de pe plafon, până la podea.

REZUMAT.

CAP. III. DREAPTĂ PERPENDICULARĂ PE UN PLAN.

* O dreaptă, perpendiculară pe două drepte *neparalele* dintr'un plan, este perpendiculară pe orice dreaptă din acel plan.

O astfel de dreaptă se zice că este perpendiculară pe plan.

* *Plan orizontal* este un plan paralel cu suprafaţa unei ape liniştite.

* *Verticală* este o dreaptă perpendiculară pe un plan orizontal; ea are direcţiunea unui fir cu plumb, atârnat de celălalt capăt.

* Perpendicularele ridicate într'un punct al unei drepte, sunt cuprinse în acelaş plan, perpendicular pe dreapta considerată.

* Printr'un punct din spaţiu se poate duce un plan perpendicular pe o dreaptă şi numai unul singur.

* *Teorema celor trei perpendiculare:* Dintr'un punct A se coboară o perpendiculară AB pe un plan P; din piciorul B al acestei perpendiculare se duce o perpendiculară BC pe o dreaptă oarecare CD din acest plan; dreapta AC, care uneşte piciorul C al acestei din urmă perpendiculare cu un punct A al primei perpendiculare, este perpendiculară pe dreapta CD.

* Două drepte perpendiculare pe acelaş plan sunt paralele între ele.

* Perpendiculara dusă dintr'un punct pe un plan este mai scurtă decât orice oblică dusă din acel punct pe plan.

* Oblicele egal depărtate de piciorul perpendicularei, sunt egale, şi reciproc.

Dintre două oblice, neegal depărtate de piciorul perpendicularei, cea mai depărtată este mai lungă, şi reciproc.

* *Distanţa dela un punct la un plan* este lungimea perpendicularei duse din acel punct pe plan.

* Distanţa dintre două plane paralele, este distanţa dela un punct oarecare al unui plan, la celălalt plan.

EXERCIŢII.

Se cere să se dea exemple din obiectele înconjurătoare, din care să se vadă că:

1. *O dreaptă, perpendiculară pe două drepte dintr'un plan, este perpendiculară pe orice dreaptă din acel plan.*

Care este piciorul perpendicularei?

2. *O dreaptă perpendiculară pe două drepte dintr'un plan, pe care nu le întâlneşte, este perpendiculară pe acel plan.*
3. *Exemplu de dreaptă oblică pe un plan. Care este piciorul oblicei?*
4. *Exemple de drepte verticale şi de plane orizontale.*
5. *Să se facă din carton, chibrituri, sârmă, figuri din care să reiasă că: perpendicularele ridicate într'un punct pe o dreaptă se găsesc în acelaş plan, perpendicular pe dreaptă.*
6. *Să se dea exemple, din obiectele înconjurătoare, din care să reiasă teorema celor trei perpendiculare.*
7. *Exemple de perpendiculare şi oblice duse dintr'un punct pe un plan. Să se recunoască pe aceste exemple proprietăţile oblicelor egale şi neegale, cu privire la distanţele picioarelor lor de piciorul perpendicularei.*

CAP. IV.

UNGHIURI DIEDRE. PLANE PERPENDICULARE.

Exemple. 1. Suprafaţa plană P a unui chipeng de pivniţă, formează cu planul Q al unui perete, o deschidere mai mare sau mai mică, după cum propteaua MN, care ţine acest chipeng, este mai scurtă sau mai lungă (fig. 85).

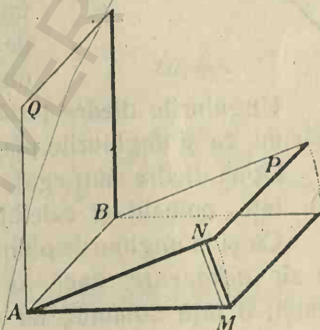


Fig. 85.

2. Suprafaţa plană P a capacului unei lăzi *pline* cu zahăr, formează cu suprafaţa plană Q a zahărului, o deschidere mai mare sau mai mică, după cum deschidem capacul mai mult sau mai puţin (fig. 86).

3. Filele unei cărţi deschise sunt feţe plane, care cuprind între ele, două câte două, o deschidere mai mică sau mai mare (fig. 87).

4. Feţele unui cristal cuprind între ele o deschidere mai mare sau mai mică, după felul cristalului.

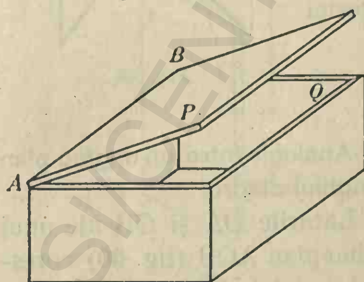


Fig. 86.

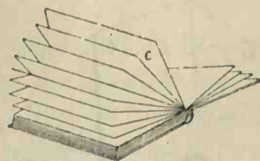


Fig. 87.

Definiţie. Figura formată de două plane, care se intersectează şi care se mărginesc la intersecţia lor, se numeşte *unghiu diedru* (sau mai pe scurt: *diedru).*

Astfel în fig. 88, planele P şi Q, care se taie după dreapta AB formează un unghiu diedru; planele P şi Q sunt *feţele diedrului*, iar dreapta lor de intersecţie AB, se chiamă *muchia diedrului*.

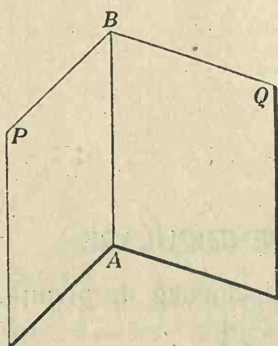


Fig. 88.

Scrierea şi citirea unui unghiu diedru. Un unghiu diedru se poate scri şi citi:

1. Cu patru litere, PABQ, literile extreme reprezentând planele, iar literile mijlocii muchia diedrului.
2. Numai prin două litere, AB, care reprezintă muchia diedrului.

Din exemplele de mai sus, se vede că un diedru poate fi mai mare sau mai mic decât alt diedru, după cum deschiderea dintre feţele lui este mai mare sau mai mică.

Unghiurile diedre putându-se *compara* între ele, sunt nişte mărimi, ca şi unghiurile plane.

Două diedre sunt egale când suprapunând muchiile lor şi două din feţe, coincid şi celelalte două feţe.

Ca şi la unghiurile plane, două diedre se zic *adiacente*, dacă au: muchia comună, o faţă comună, iar celelalte două feţe situate de o parte şi de alta a feţei comune.

In fig. 89, diedrele PABR şi RABQ sunt adiacente, deoarece muchia AB este comună, faţa R este comună, iar feţele P şi Q sunt de o parte şi de alta a acestei feţe.

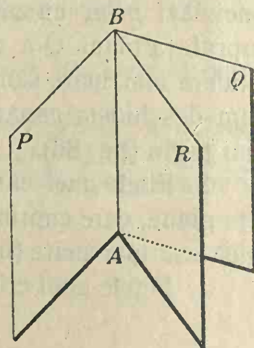
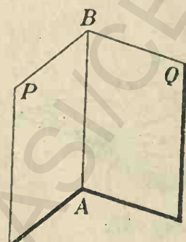


Fig. 89.



O
B
A

Fig. 90.

Analogie între un unghiu plan şi unghiul diedru.

Laturile OA şi OB ale unui unghiu plan AOB (fig. 90) corespund cu feţele P şi Q ale unui unghiu diedru; vârful O al unghiului plan corespunde cu muchia AB a unghiului diedru.

Un unghiu plan se scrie şi se citeşte: unghiul AOB sau unghiul O.

Un unghiu diedru se scrie şi se citeşte: diedrul PABQ sau diedrul AB.

Unghiu plan al unui unghiu diedru. Intr'un punct *oarecare* O al muchiei AB a unui diedru, să ducem un plan perpendicular pe această muchie; acest plan taie faţa P a diedrului după dreapta OM, iar faţa Q după dreapta ON; *obţinem astfel unghiul plan:* ∢ MON (fig. 91).

Să observăm că în orice punct al muchiei AB am repeta operaţiunea de mai sus, am obţine un unghiu plan egal cu unghiul ∢ MON; într'adevăr unghiul plan M'O'N' obţinut printr'un plan perpendicular pe muchia AB în O' este egal cu unghiul MON, deoarece aceste unghiuri au laturile paralele şi îndreptate în acelaş sens.

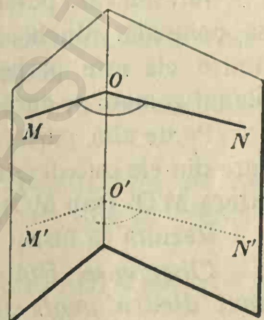


Fig. 91.

Unghiul MON *(sau* M'O'N', *etc), se numeşte unghiul plan al diedrului* AB.

Exemplu. Unghiul diedru format de planul P al unei uşi întredeschise, şi planul Q al cadrului uşii, are ca *unghiu plan* corespunzător, unghiul MAN format de linia AM a pragului şi marginea de jos AN a uşii (fig. 92).

Într'adevăr, muchia AB a acestui diedru fiind linia ţâţânilor, este perpendiculară în A pe planul podelei; iar planul podelei taie feţele diedrului PABQ după dreptele AM şi AN.

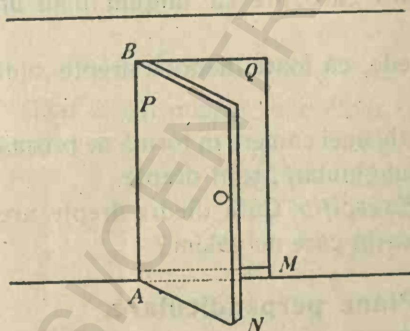


Fig. 92.

Teoremă. Dacă două diedre sunt egale şi unghiurile lor plane sunt egale; şi reciproc.

Într'adevăr, *) să figurăm pe fiecare din diedrele egale: PABQ şi P'A'B'Q' unghiurile plane corespunzătoare, respectiv în MON şi M'O'N'.

Să aducem muchia A'B' să coincidă cu AB astfel ca punctul

*) Se recomandă să se urmărească demonstraţia pe o figură.

O′ să vină în O; *deoarece diedrele sunt prin ipoteză egale*, dacă facem ca faţa P′ să coincidă cu P, şi faţa Q′ va coincide cu Q.

Dreptele MO şi M′O′ fiind situate acum în aceeaşi faţă P (sau P′) şi fiind perpendiculare în acelaş punct O (sau O′) pe muchia AB (sau A′B′), vor coincide; tot astfel O′N′ va coincide cu ON.

Deci unghiurile plane MON şi M′O′N′ sunt egale.

Reciproc. *Dacă unghiurile plane* MON *şi* M′O′N′ *sunt egale, şi diedrele corespunzătoare sunt egale.*

Intr'adevăr, putem face ca unghiurile plane MON şi M′O′N′ să coincidă. Muchia A′B′ va coincide cu AB, deoarece fiecare dintre ele este perpendiculară în punctul O (coincis cu O′) pe planul comun, pe care s'au aşternut unghiurile MON şi M′O′N′.

Pe de altă parte, faţa P′ va coincide cu faţa P, deoarece fiecare din ele este determinată de muchia diedrului A′B′ (sau AB) şi latura M′O′ (sau MO) care au coincis. La fel cu planele Q′ şi Q.

Rezultă că însăşi diedrele au coincis, adică sunt egale.

Observare. *Din cele ce preced, rezultă că unghiul plan al unui diedru poate servi la compararea mărimii unghiurilor diedre* şi anume: un unghiu diedru este mai mare sau mai mic decât altul, după cum unghiul plan al primului diedru este mai mare sau mai mic decât al celuilalt diedru.

(Pentru a proba aceasta, este suficient să se suprapună muchiile diedrelor şi câte una din feţe, aşa fel ca unghiurile plane să aibe astfel vârful şi câte o latură comună).

Diedru drept este un diedru care are ca unghiu plan un unghiu drept.

Rezultă din teorema ce precede, că toate diedrele drepte sunt egale între ele.

Exemplu. Unghiurile diedre ale unei camere în formă de prismă dreptunghiulară, sunt drepte.

Exerciţiu. Câte diedre drepte are camera în care ne găsim?

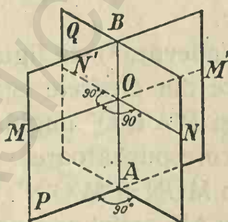


Fig. 93.

Plane perpendiculare.

Două plane care formează prin întretăiere, un unghiu diedru drept, se numesc *plane perpendiculare.*

Astfel planele P şi Q (fig. 93), care se taie după dreapta AB şi formează un diedru drept, sunt perpendiculare.

Observare. Planele perpendiculare P şi Q formează două unghiuri diedre adiacente egale, deoarece unghiurile plane corespunzătoare MON şi MON′ sunt adiacente şi egale (ca unghiuri drepte) şi reciproc.

Rezultă de aci că:

Două plane sunt perpendiculare, dacă unul din ele întâlnind pe celălalt, formează unghiuri diedre adiacente egale.

Exemple. 1. Planul unui perete este de obiceiu perpendicular pe planul podelei.

2. Feţele plane ale unui dulap, sunt de obiceiu perpendiculare pe planul fundului dulapului şi pe planul capacului.

3. Feţele orizontale ale treptelor unei scări, sunt perpendiculare pe feţele lor verticale.

Teoremă. Dacă o dreaptă AB *este perpendiculară pe un plan* P, *atunci orice plan* Q, *care trece prin* AB, *este perpendicular pe planul* P (fig. 94).

Fie CD intersecţia dintre planul Q (dus prin AB) şi planul P; în planul P, să ridicăm perpendiculara AE pe dreapta CD; de oarece AB este prin ipoteză perpendiculară pe planul P, ea este perpendiculară pe orice dreaptă din acest plan, adică şi pe CD şi pe AE.

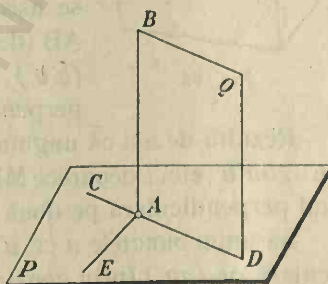


Fig. 94.

Avem deci pe de o parte rezultatul:

∢ EAB este drept.

Dar acest unghiu este chiar unghiul planal diedrului PCDQ căci muchia CD fiind perpendiculară pe AB (rezultat al ipotezei) şi pe AE (rezultat al construcţiei) este perpendiculară pe planul EAB.

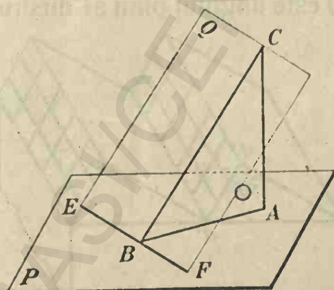


Fig. 95.

Exemplu. O uşe, în diferitele ei poziţiuni, reprezintă o suprafaţă plană, care trece necontenit prin axa balamalelor; această axă este perpendiculară pe planul podelei, iar planul uşii este totdeauna perpendicular pe acela al podelei.

Aplicaţii. 1. Dacă aşezăm un echer ABC pe o masă orizontală P, astfel ca latura AB să fie verticală, iar latura BC perpendiculară pe o dreaptă EF depe acea masă, atunci unghiul diedru format de planul Q (determinat de ipotenusa BC a echerului şi dreapta EF) cu planul P al mesei, este egal cu unghiul ABC (fig. 95).

(Se va observa că în baza teoremei celor trei perpendiculare, muchia EF a diedrului format de planele P şi Q este perpendiculară pe planul ABC al echerului).

2. Feţele plane ABNM şi CDMN ale unui acoperiş formează cu planul ABCD al podului, două diedre şi între ele un al treilea (fig. 96).

Aceste diedre se pot scrie: diedrul AB, diedrul MN, diedrul CD.

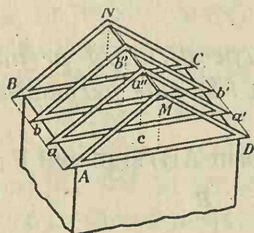


Fig. 96.

Deoarece AB || CD, dreapta de intersecţie MN (coama) a planelor ABNM, CDMN este paralelă cu planul podelei ABCD (vezi pag. 25).

Grinzile de lemn (căpriorii) (aa'') (bb'')... se aşează pe faţa AMNB, *perpendicular* pe AB (deci şi pe MN); tot astfel grinzile $(a'a'')$ $(b'b'')$... depe faţa CDMN, sunt aşezate perpendicular pe MN şi CD.

Rezultă de aci că unghiul plan al diedrului MN este $\sphericalangle aa''a'$ sau $\sphericalangle bb''b'$, etc.... deoarece MN este perpendiculară pe planul $(aa''a')$, fiind perpendiculară pe două drepte aa'' şi $a''a'$ din acest plan.

Să unim punctele a cu a', b cu b', etc. Muchia AB este perpendiculară pe (aa'') (prin construcţie) şi *ca direcţie* şi pe $(a''a')$, deoarece $a''a' \perp$ CD (prin construcţie), iar CD || AB.

Rezultă că muchia AB (sau paralela ei CD) este perpendiculară pe planul $(aa''a')$, adică $\sphericalangle (a'aa'')$ este unghiul plan al diedrului AB, iar unghiul $\sphericalangle (aa'a'')$ este unghiul plan al diedrului CD.

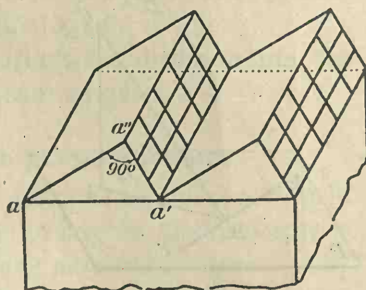


Fig. 97.

Mai rezultă că dreapta (aa') este perpendiculară pe AB (sau CD) deoarece AB (sau CD) sunt perpendiculare pe planul $(aa'a'')$, deci pe orice dreaptă din acest plan, şi că dreapta (aa') este proiecţiunea pe planul podului a celor doi căpriori (aa'') $(a''a')$.

In concluzie: 1. Valoarea unghiului diedru a două feţe plane

ale unui acoperiş se măsoară prin unghiul plan al căpriorilor ce se întâlnesc în acelaş punct pe muchia lor.

2. Valoarea unghiului diedru format de o faţă plană de acoperiş cu planul podului, este dat de unghiul plan format de un căprior al acelei suprafeţe plane şi *proiecţia lui* pe planul podului [1]).

Observare. Dacă triunghiul $(aa''a')$ este isoscel, diedrele AB şi CD sunt egale, deoarece, unghiurile plane $a'aa''$ şi $aa'a''$ sunt egale.

Uneori, feţele unui acoperiş se aşează ca în fig. 97. Triunghiul $(aa''a)$ fiind dreptunghiu în a'' şi cu catetele (aa'') şi $(a''a')$ neegale.

---

[1]) Se putea folosi şi teorema celor trei perpendiculare: dreapta $a''c$ e perpendiculară pe planul ABCD; dreapta $aa'' \perp$ AB; deci dreapta $ac \perp$ AB.

REZUMAT.

CAP. IV. — UNGHIURI DIEDRE. PLANE PERPENDICULARE.

* *Unghiu diedru* este figura formată de două plane, care se intersectează şi se mărginesc la intersecţia lor.

Aceste plane sunt *feţele* diedrului, iar dreapta de intersecţie se chiamă *muchia* diedrului.

* Două unghiuri diedre sunt *adiacente* dacă au muchia comună, o faţă comună, iar celelalte două feţe situate de o parte şi de alta a feţei comune.

* *Unghiu plan* al unui diedru, este unghiul plan format de intersecţiile feţelor lui cu un plan perpendicular pe muchia diedrului într'un punct oarecare al acesteia.

* Mărimea unui unghiu diedru se măsoară prin mărimea unghiului său plan.

Două diedre sunt egale, dacă unghiurile lor plane sunt egale; un diedru este mai mare (sau mai mic) decât altul, dacă unghiul plan corespunzător al unuia dintre diedre, este mai mare (sau mai mic) decât al celuilalt.

* Un unghiu diedru este drept, dacă unghiul său plan este drept.

* *Două plane sunt perpendiculare*, dacă ele formează prin întretăiere două unghiuri diedre drepte (sau două unghiuri diedre adiacente egale).

* Orice plan, care trece printr'o dreaptă perpendiculară pe un alt plan, este perpendicular pe acest din urmă plan.

EXERCIŢII.

1. *Să să citească unghiurile diedre obţinute când ducem în colţul unei camere un plan care taie muchiile podelei în* A *şi* B, *iar muchia dintre pereţi în* C*; să se arate pentru fiecare diedru care este muchia lui şi care sunt feţele.*

R: Se formează şase unghiuri diedre: OA, OB, OC, AB, BC, CA.

2. *Presupunând că muchiile* OA, OB, OC *sunt perpendiculare două câte două, să se citească* unghiurile plane *ale diedrelor din exerciţiul precedent.*

R: Diedrul OA este drept, deoarece are ca unghiu plan, unghiul drept BOC; tot astfel diedrul OB este drept şi are ca unghiu plan: $\sphericalangle$ COA; iar diedrul OC este drept şi are ca unghiu plan: $\sphericalangle$ AOB.

Pentru a obţine unghiurile plane ale diedrelor AB, BC, CA, trebuie să ducem câte un plan perpendicular pe fiecare din aceste muchii. Spre exemplu, pentru diedrul AB, format de planele OAB şi ABC, ducem $Oc \perp AB$; în baza teoremei celor trei perpendiculare, rezultă că şi $Cc \perp AB$; deci, unghiul plan căutat este $\sphericalangle OcC$.

In mod analog se poate proceda pentru diedrele BC, CA.

3. *Să se arate cu ajutorul filelor unei cărţi, că printr'o dreaptă perpendiculară pe un plan, trec oricât de multe plane perpendiculare pe acel plan.*

R: Se va aşeza cartea pe o masă cu cotorul perpendicular pe suprafaţa plană a mesei; în această poziţiune, orice filă a cărţii face parte dintr'un plan, care trece prin cotorul cărţii şi este perpendicular pe suprafaţa mesei.

CAP. V.

PROIECŢIUNI.

Fie un plan P şi un punct M *exterior* planului (fig. 98); să coborîm din M perpendiculara M*m* pe planul P; piciorul *m* al perpendicularei M*m* se numeşte *proiecţiunea* punctului M pe planul P; perpendiculara M*m* se cheamă *proiectanta* punctului M, iar planului P, i se zice şi *plan de proiecţie*[1]).

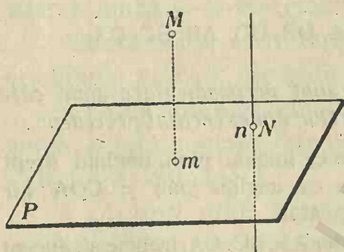


Fig. 98.

Observare. Dacă punctul N este situat în planul de proiecţie P, lungimea proiectantei N*n* este egală cu zero, iar *proiecţiunea* n *a punctului, se confundă cu punctul* N.

Rezultă de aci, că proiecţia pe un plan P a unui punct oarecare N din acel plan, este *însuşi* punctul N.

Proiecţia unei drepte pe un plan. Fie planul de proiecţie P şi o dreaptă oarecare AB (fig. 99).

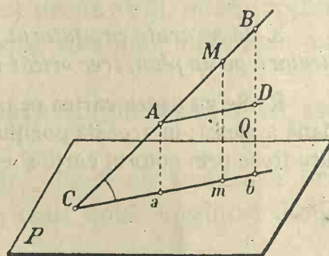


Fig. 99.

Să proiectăm punctul A în *a*, cu ajutorul proiectantei A*a*; planul Q determinat de dreapta AB şi proiectanta A*a*, intersectează planul P după o dreaptă *ab*.

Să proiectăm acum un punct oarecare M depe dreapta AB;

1. Deoarece proiecţiunea *m* s'a obţinut cu ajutorul unei perpendiculare pe planul de proiecţie, se zice că *m* este *proiecţiunea ortogonală* a punctului M pe planul P (În limba greacă, *orto* înseamnă drept, iar *gônia* = unghiu).

proiectanta M*m* fiind ca şi A*a* perpendiculară pe planul P, dreptele M*m* şi A*a* sunt paralele, deci sunt situate în acelaş plan Q. Rezultă că M*m* întâlneşte planul P pe dreapta de intersecţie a planelor P şi Q, în *m*, adică: *proiecţiunea oricărui punct depe dreapta* AB *se găseşte pe intersecţia* ab *a planului P cu planul Q.*

Definiţii. Planul Q, care conţine proiectantele *tuturor* punctelor depe dreapta AB, se cheamă *plan proiectant* al dreptei AB; intersecţia *ab* a planului proiectant Q cu planul de proiecţie P şi care conţine proiecţiunile *tuturor* punctelor dreptei AB, se numeşte *proiecţiunea* dreptei AB pe planul P.

Din cele de mai sus, putem conchide:

Teoremă. Proiecţiunea unei drepte pe un plan este tot o dreaptă; pentru a obţine proiecţiunea unei drepte AB *pe un plan* P, *este suficient să unim printr'o dreaptă proiecţiile* a *şi* b *pe acest plan, a două puncte* A *şi* B *ale dreptei.*

Observare. In (fig. 99) să ducem prin punctul A, în planul Q, dreapta AD, paralelă cu proiecţia *ab*, deci paralelă şi cu planul P; figura A*ab*D fiind un dreptunghiu, deoarece $Aa \perp ab$ (sau AD), $Db \perp ab$ (sau AD), avem:

$$AD = ab$$

In triunghiul dreptunghiu ABD, segmentul AB este ipotenuză, iar AD este o catetă; rezultă de aci că: *oridecâte ori un segment* AB *nu este paralel cu un plan de proiecţie* P, *lungimea proiecţiunii* ab *este mài mică decât segmentul* AB *din spaţiu.*

Cazuri particulare. 1. *Dreapta* AB *este paralelă cu planul* P

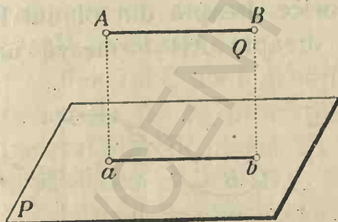


Fig. 100.

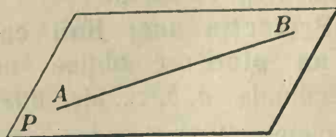


Fig. 101.

(fig. 100); în acest caz proiecţia *ab* este paralelă cu dreapta AB, deoarece ea este intersecţia cu planul P a planului Q, dus prin dreapta AB paralelă cu P (vezi pag. 23). Figura *a*AB*b* fiind un dreptunghiu, *segmentul din spaţiu* AB *este egal cu proiecţiunea* sa ab.

2. *Dreapta* AB *este conţinută în planul* P (fig. 101). In baza ob-

servaţiei 1 de mai sus, rezultă că dreapta AB se confundă cu proiecţia sa *ab*, adică: *dreapta* AB *este ea însăşi proiecţia ei pe plan.*

3. *Dreapta* AB *este perpendiculară pe planul* P (fig. 102). In acest caz, proiectantele A*a* şi B*b* se confundă cu perpendiculara AB, iar proiecţiunile *ab* se confundă cu piciorul acestei perpendiculare pe plan. Deci: *proiecţiunea* ab *a dreptei* AB *se reduce la un punct* (piciorul perpendicularei), iar lungimea segmentului *ab* este egală cu zero.

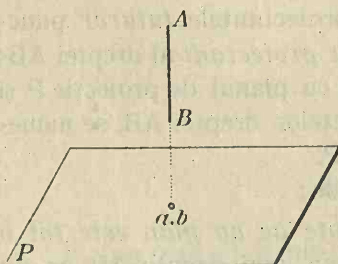


Fig. 102.

Unghiul unei drepte cu un plan este prin definiţie unghiul dintre acea dreaptă cu proiecţiunea ei pe plan.

Fie dreapta AB şi planul P (fig. 99); unghiul dreptei AB cu planul P este prin definiţie unghiul ∢ *a*CA, format de dreapta AB cu proiecţia ei *ab* pe plan sau: este unghiul ∢ DAB al dreptei AB cu paralela AD dusă prin A la proiecţia *ab*; aceasta deoarece unghiurile ∢ *c*CA şi ∢ DAB sunt egale ca unghiuri corespondente, formate de paralelele AD şi *ab*, tăiate de secanta BAC.

Cazuri particulare: 1. Dacă dreapta AB este paralelă cu planul de proiecţie P (fig. 100), unghiul ei cu acest plan este egal cu zero, deoarece dreapta AB este paralelă cu proiecţia ei *ab* şi unghiul a două drepte paralele este egal cu zero.

2. Dacă dreapta AB este perpendiculară pe planul de proiecţie P (fig. 102), unghiul ei cu orice dreaptă din planul P fiind drept (vezi pag. 33), zicem că dreapta AB formează un unghiu drept cu planul.

Proiecţia unei linii curbe pe un plan se obţine unind proiecţiunile *a, b, c*... ale diferitelor puncte A, B, C... depe curbă (fig. 103).

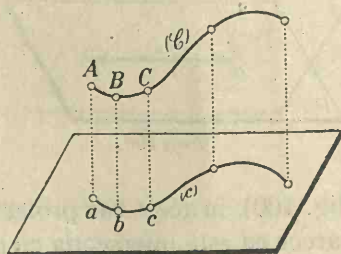


Fig. 103.

Se vede astfel că: *proiecţiunea unei curbe pe un plan este, în general, tot o linie curbă.*

Exemple: 1. Proiecţia unei linii drepte AB desenată pe peretele unei camere (fig. 104), pe planul P al podelei, este muchia *ab* dintre pe-

rete și podea. Aa este proiectanta punctului A, Bb este proiectanta lui B.

Tot astfel proiecţiunea muchiei AC a tavanului, este muchia ac depe podea. Deoarece AC este paralelă cu planul P, avem: $AC = ac$.

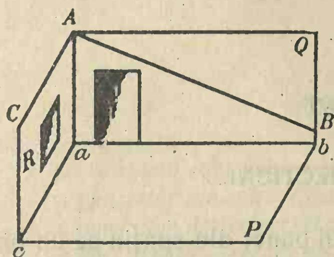


Fig. 104.

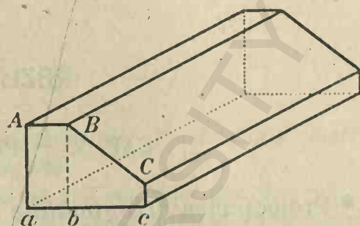


Fig. 105.

2. Marginea AB a catedrei (fig. 105) este paralelă cu planul P al bazei ei, pe când muchia BC este înclinată pe acel plan.

Proiecţia lui AB este $ab = AB$, iar proiecţia lui BC este $bc \neq BC$.

Aplicaţie. Proiecţiunea unui punct din spaţiu pe o dreaptă dintr'un plan.

Fie dreapta AB situată în planul P şi punctul M exterior planului (fig. 106).

Punctul M şi dreapta AB determină un plan Q; *în acest plan, proiecţiunea* C *a punctului* M *pe dreapta* AB, *este piciorul perpendicularei coborite din* M *pe dreaptă.*

Punctul C poate fi obţinut şi astfel: fie m proiecţiunea punctului M pe planul P; din m să ducem $mC \perp AB$.

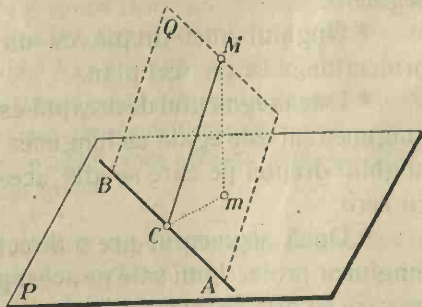


Fig. 106.

In baza teoremei celor trei perpendiculare (pag. 38), rezultă că $MC \perp AB$, adică C este proiecţiunea punctului M pe dreapta AB din planul P.

Observare. Această proiecţiune s'a obţinut mai sus, folosind proiecţiunea punctului M pe planul P.

REZUMAT.

CAP. V. — PROIECŢIUNI.

* Proiecţiunea *ortogonală* a unui punct din spaţiu pe un plan, este piciorul perpendicularei coborîte din acel punct pe plan.

Perpendiculara coborîtă din punct pe plan, este *proiectanta* punctului din spaţiu; planul, pe care proiectăm punctul, se chiamă *plan de proiecţie*.

* Proiecţiunea unei drepte pe un plan este tot o dreaptă; ea este intersecţia dintre planul, care conţine proiectantele tuturor punctelor depe dreaptă *(planul proiectant)*, cu planul de proiecţie.

* Proiecţiunea unei drepte pe un plan, se poate obţine unind proiecţiunile a două puncte oarecari depe acea dreaptă.

* Lungimea proiecţiunii unui segment de dreaptă, înclinat faţă de planul de proiecţie, este mai mică decât lungimea acelui segment.

* Unghiul unei drepte cu un plan, este unghiul dreptei cu proiecţiunea sa pe acel plan.

* Dacă segmentul de dreaptă este paralel cu planul de proiecţie, lungimea lui este egală cu lungimea proiecţiunii lui pe acel plan, iar unghiul dreptei pe care se află acest segment, cu planul, este egal cu zero.

* Dacă segmentul are o direcţie perpendiculară pe planul P, lungimea proiecţiunii sale pe acest plan este egală cu zero; dreapta pe care se află segmentul, face unghiuri drepte cu orice dreaptă din plan; se zice că ea face un unghiu drept cu planul.

* O dreaptă conţinută într'un plan, este ea însăşi proiecţia ei pe acel plan.

EXERCIŢII.

1. *Să se spună care sunt proiecţiunile pe planul podelei unei camere:*

a) *a punctelor din colţurile plafonului;*

b) *a muchiilor dintre pereţi şi plafon şi a muchiilor dintre pereţi;*

c) *a unei drepte oarecare, desenată pe planul plafonului şi a unei drepte oarecare, desenată pe unul din pereţi.*

Care sunt proiectantele şi care sunt planurile proiectante în fiecare din cazurile de mai sus?

2. *Care este unghiul format de una din dreptele următoare cu planul podelei unei camere:*

a) *dreapta care uneşte un colţ al podelei cu colţul opus al tavanului.*

b) *muchia dreaptă dintre plafon şi perete.*

c) *muchia dintre doi pereţi.*

3. *Cum este lungimea proiecţiunii pe podea, faţă de lungimea segmentului proiectat, în fiecare din cazurile de mai sus?*

4. *Să se arate că, dacă o bucată grea din tencuiala plafonului unei camere, ar cădea pe podea, fără să se spargă, figura obţinută pe podeaua orizontală, este proiecţiunea ortogonală a figurii detaşate depe plafon.*

R: Se va observa că în cădere fiecare punct descrie o dreaptă verticală, adică o perpendiculară pe podea. Drumul descris de fiecare punct este *proiectanta ortogonală* a acelui punct; iar punctul unde aceasta întâlneşte planul podelei este proiecţiunea punctului din spaţiu.

5. *Picăturile pe suprafaţa orizontală a pământului, ale unei ploi ce cade vertical sunt proiecţiunile unor puncte din spaţiu?*

R: Sunt proiecţiunile ortogonale ale părticelelor mici de apă (reduse la un punct geometric) în care se descompune un nor.

CAP. VI

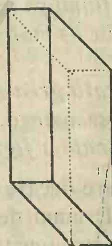
PRISMA

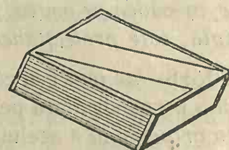
Exemple. Să privim corpurile geometrice din figurile 108—111. Observăm că ele sunt formate din două feţe, poligoane egale şi paralele, numite *baze* şi din paralelograme sau dreptunghiuri, care sunt *feţele* lor laterale; acestea din urmă au câte o latură comună cu fiecare din baze.

Astfel creionul (fig. 107), are ca baze două exagoane regulate, iar feţele laterale sunt dreptunghiuri; cristalul din (fig. 108) are ca baze două triunghiuri oarecari, însă egale şi paralele între ele, iar feţele laterale sunt paralelograme; cărămida din (fig. 109), are ca baze două dreptunghiuri,


Fig. 107.


Fig. 108.


Fig. 109.


Fig. 110.

iar feţele laterale sunt tot dreptunghiuri; cutia de chibrituri din (fig. 110), care a fost puţin turtită, are ca baze două paralelograme şi ca feţe dreptunghiuri.

Să se observe că în ultimele două exemple, oricare două feţe opuse pot fi luate ca baze.

Definiţie. Un poliedru [1]) care are două feţe, poligoane egale şi paralele, numite *baze*, iar celelalte feţe numite *feţe laterale*,

[1]) *Poliedru* este o figură geometrică mărginită de feţe *plane*.

paralelograme sau dreptunghiuri, care au câte o latură comună cu fiecare din baze, se numeşte *prismă*.

In (fig. 111) este reprezentată o prismă ABCDEF A'B'C'D'E'F'. Ea are ca *baze* două exagoane ABCDEF şi A'B'C'D'E'F'; ca *feţe laterale* dreptunghiurile ABB'A', BCC'B', CDD'C' etc.; laturile celor două poligoane de bază sunt *muchiile de bază* ale prismei (spre exemplu: AB, BC, A'B', B'C', ...); laturile AA', BB', CC', ... sunt *muchiile laterale* ale prismei.

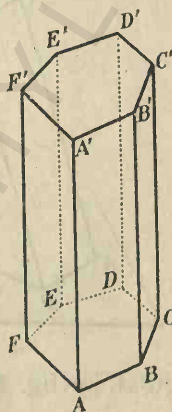


Fig. 111.

Muchiile prismei sunt deci liniile de întretăiere ale feţelor laterale cu bazele şi ale feţelor laterale între ele.

Muchiile laterale ale unei prisme fiind porţiuni de drepte paralele cuprinse între plane paralele, sunt totdeauna egale între ele.

Punctele A, B, C, ... A'B'C', ... de intersecţie ale muchiilor se numesc *vârfurile* prismei.

Intr'un vârf se întâlnesc totdeauna *trei* muchii şi *trei* feţè.

Prismă dreaptă este o prismă, care are muchiile laterale perpendiculare pe planele fiecărei baze; bazele ei sunt două poligoane oarecari, (paralele şi egale), iar feţele ei laterale sunt *dreptunghiuri.*

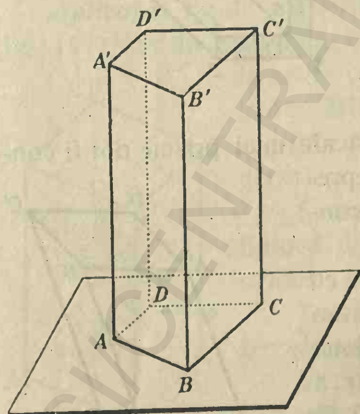


Fig. 112.

In (fig. 112) se arată o prismă dreaptă ABCDD A'B'C'D', care are ca baze două patrulatere oarecari.

Prismă oblică este o prismă, care are muchiile laterale oblice pe bază; feţele ei laterale sunt *paralelograme.*

In (fig. 113) se arată o prismă oblică, care are drept baze două pentagoane oarecari (paralele şi egale).

După felul poligoanelor de bază, există *prisme triunghiulare* (bazele sunt triunghiuri), *prisme patrulatere* (bazele sunt patrulatere), *prisme pentagonale, exagonale* etc.

Inălţimea unei prisme este distanţa dintre planele paralele ale bazelor. Ea se măsoară deci pe o perpendiculară dusă dintr'un punct oarecare al uneia din baze pe cealaltă.

Dacă prisma este dreaptă, înălţimea ei este egală cu *una* oarecare din muchiile ei laterale; dacă prisma este oblică (fig. 113), înălţimea este distanţa unuia din vârfurile prismei la planul celeilalte baze, spre exemplu: distanţa C′C″; ea este evident mai scurtă decât muchiile laterale ale prismei.

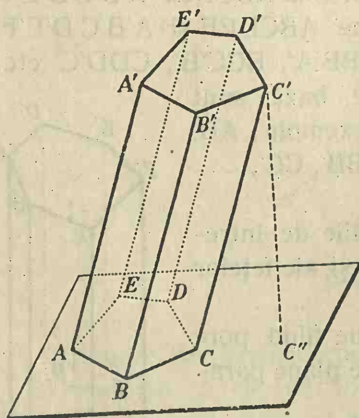


Fig. 113.

Observare. Când se dă o prismă, trebue să cercetăm întâi dacă este *dreaptă sau oblică*; dacă poligonul de bază este *regulat* sau nu, şi câte laturi are.

Astfel fig. 111, reprezintă o *prismă dreaptă, regulată cu baza un exagon*; fig. 112 arată o prismă dreaptă cu baza un patrulater neregulat, iar fig. 113 reprezintă o prismă oblică cu baza un pentagon.

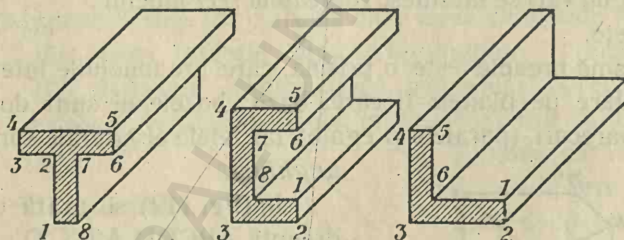


Fig. 114.

Observare. Poligoanele de bază ale unei prisme pot fi concave sau convexe; figurile 111—113 reprezintă prisme cu poligoane de bază convexe.

În fig. 114 se arată câteva prisme cu poligoane de bază concave.

Primele două prisme au ca baze două octogoane (1, 2, 3, . . . 8) concave, iar a treia prismă, un exagon (1, 2, 3, 4, 5, 6) concav.

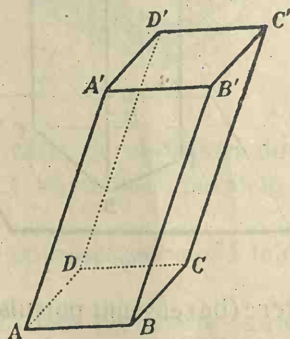


Fig. 115

Paralelipipedul este o prismă patrulateră ale cărei baze sunt paralelograme. Când muchiile sunt oblice pe planele bazelor, paralelipipedul este *oblic* (fig. 115), iar când muchiile sunt

perpendiculare pe planele bazelor, paralelipipedul este *drept* (fig. 116).

Dacă şi bazele unui paralelipiped drept sunt dreptunghiuri, paralelipipedul este dreptunghiu.

La un paralelipiped, feţele laterale sunt paralelograme sau dreptunghiuri şi se pot lua ca baze două feţe opuse oarecari.

La *oricare* paralelipiped, feţele opuse fiind paralelograme sau dreptunghiuri, sunt *paralele şi egale.*

Linia, care uneşte două vârfuri ale unui paralelipiped, care nu se găsesc pe aceeaşi faţă, se chiamă *diagonală;* un paralelipiped are deci *patru* diagonale.

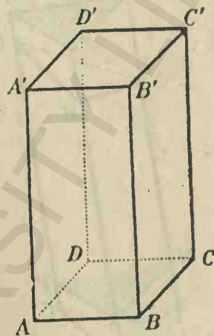


Fig. 116.

Lungimile, a trei muchii care pornesc din acelaş vârf, se numesc *dimensiunile* paralelipipedului; la un paralelipiped dreptunghiu, cele trei muchii ce pornesc din acelaş vârf sunt două câte două perpendiculare.

Exemple: Unele scânduri de parchet se taie în formă de paralelipiped drept.

Cărămizile, lăzile, cărţile, etc. sunt de obiceiu paralelipipede dreptunghiuri.

Aplicaţie. Se dă un paralelipiped oarecare ABCD, A'B'C'D' (fig. 117) şi se duce un plan, care să taie patru din muchiile lui; să se arate că figura obţinută este un *paralelogram* MNPQ (acest paralelogram se numeşte *secţiunea* paralelipipedului prin planul considerat).

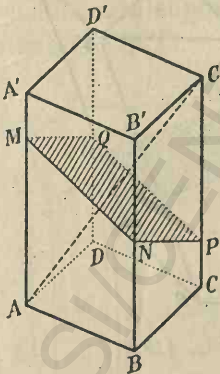


Fig. 117.

Exerciţiu. Să se arate că într'un paralelipiped dreptunghiu, cele patru diagonale sunt egale.

Teoremă. Două prisme drepte, care au bazele egale şi înălţimile egale,— sunt egale.

Se poate dovedi aceasta, prin *suprapunerea* celor două prisme; bazele fiind egale, — putem face spre exemplu ca bazele lor inferioare să coincidă; muchiile laterale ale celor două prisme, fiind prin ipoteză egale şi paralele, vor coincide deasemeni, astfel că şi bazele superioare vor coincide.

Prismele coincizând, sunt egale.

Teoremă. *O prismă oblică este echivalentă, (adică are acelaş volum) cu o prismă dreaptă, care are ca bază secţiunea dreaptă făcută în prisma oblică şi ca înălţime muchia laterală o prismei oblice.*

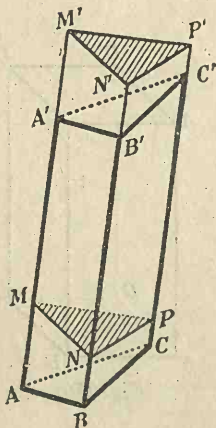


Fig. 118.

Fie prisma oblică ABC A′B′C′ (fig. 118), în care se face secţiunea dreaptă (perpendiculară pe muchii) MNP; să construim apoi o prismă, care are această secţiune ca bază, iar înălţimea:

$$MM' = NN' = PP'$$

egală cu lungimea muchiei laterale a prismei oblice:

$$AA' = BB' = CC'$$

Vrem să dovedim că prisma oblică ABC,A′B′C′ este echivalentă cu prisma dreaptă MNPM′N′P′.

În acest scop să dăm solidului ABCMNP o mişcare de translaţie paralel cu muchiile prismei, de jos în sus pe o distanţă egală cu lungimea acestor muchii (adică se ia aceste muchii ca lunecătoare *fixe*, iar laturile triunghiurilor ABC, MNP ca lunecătoare *mobile*).

Baza ABC va coincide cu baza A′B′C′, care este paralelă cu ea; tot astfel secţiunea dreaptă MNP va coincide cu secţiunea M′N′P′, distanţa între ele fiind *prin construcţie*: MM′ = AA′.

Rezultă că solidul ABCMNP coincide cu solidul A′B′C′M′N′P′, adică ceeace se scoate de jos din prisma oblică, se adaogă la partea ei superioară; deci prisma oblică ABCA′B′C′ *are acelaş volum* (este echivalentă) cu prisma dreaptă MNPM′N′P′.

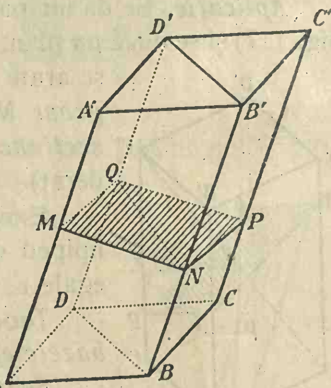


Fig. 119.

Teoremă. *Planul dus prin două muchii paralele ale unui paralelipiped oarecare şi nesituate pe aceeaşi faţă, împarte paralelipipedul în două prisme triunghiulare echivalente.*

Fie paralelipipedul *oblic* (oarecare), ABCDA′B′C′D′ (fig. 119)

şi planul BB′DD′ dus prin muchiile BB′, DD′ paralele (şi nesituate pe aceeaşi faţă); voim *să* dovedim că prismele triunghiulare ABD A′B′D′ şi BCDB′C′D′ sunt *echivalente*.

În acest scop să construim secţiunea dreaptă MNPQ care este un paralelogram (vezi pag. 70 aplicaţie) şi deci diagonala QN îl desparte în două triunghiuri echivalente MNQ şi NPQ; potrivit teoremei precedente fiecare din prismele triunghiulare, în care se descompune paralelipipedul, este echivalentă cu o prismă dreaptă, care are ca bază secţiunea dreaptă MPQ sau NPQ şi ca înălţime muchia laterală AA′ = BB′ = . . . ; deoarece această muchie are aceeaşi lungime pentru ambele prisme triunghiulare, iar suprafeţele bazelor MNQ şi NPQ sunt echivalente, urmează că prismele vor fi echivalente, adică ceeace voiam să demonstrăm.

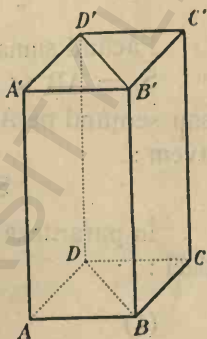


Fig. 120.

Definiţie. Un plan ca BB′DD′, care trece prin două muchii paralele ale unei prisme şi nesituate pe aceeaş faţă, se numeşte *plan diagonal*.

Observare. La un paralelipiped dreptunghiu (fig. 120) ABCD A′B′C′D′, planul diagonal BB′ D′D (sau planul diagonal AA′ C′C) desparte paralelipipedul în două prisme triunghiulare *egale* (nu numai echivalente); aceasta din cauză că ele au aceeaş înălţime, muchia paralelipipedului, iar bazele egale; triunghiul ABD = triunghiul BCD.

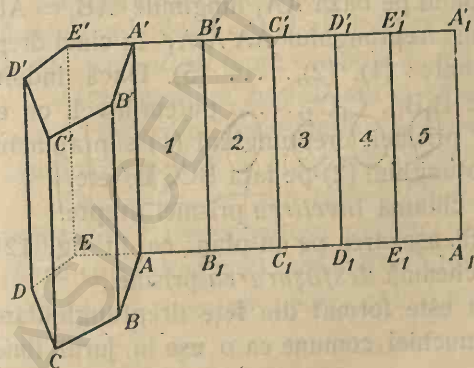


Fig. 121.

Aria prismei.

Definiţii. 1. *Aria laterală a unei prisme este egală cu suma ariilor feţelor ei laterale.* O vom nota cu S_l.

2. *Aria totală a unei prisme este egală cu aria laterală, la care se adaogă ariile celor două baze.* O vom nota cu S_t.

Aria laterală S_l a prismei drepte.

Fie prisma ABCDEA′B′C′D′E′ (fig. 121) care fiind prin ipo-

teză *dreaptă,* are ca feţe laterale, dreptunghiuri, iar ca baze poligoane oarecare; aria fiecărui dreptunghiu este:

Dreptunghiul $AA'B'B = AB \times AA'$
„ $BB'C'C = BC \times BB'$ (sau AA')
„ $CC'D'D = CD \times CC'$ (sau BB' sau AA')

Făcând suma, membru cu membru, a acestor egalităţi, găsim;
$S_l = AB \times AA' + BC \times AA' + CD \times AA' + \ldots\ldots\ldots$
sau scoţând pe $AA' = I$ (înălţimea prismei drepte) în factor comun, avem:

$$S_l = I\,(AB + BC + CD + \ldots)$$

În paranteză este însă tocmai perimetrul P al uneia din baze; deci:

(1) $$\boxed{S_l = P \times I}$$

adică: *suprafaţa laterală a unei prisme drepte este egală cu perimetrul uneia din baze înmulţit cu înălţimea prismei.*

Înfăşurarea şi desfăşurarea prismei drepte.

O prismă dreaptă, are feţele laterale dreptunghiuri; putem deci *înveli* suprafaţa ei laterală servindu-ne de o hârtie, tablă etc., în forma unui dreptunghiu, care să aibă ca înălţime, înălţimea prismei şi ca *bază* perimetrul uneia din bazele prismei.

În acest scop să tăiem spre exemplu din hârtie dreptunghiul $AA'A_1A_1'$ cu înălţimea AA' (cât a prismei) şi cu baza AA_1 (cât perimetrul bazei ABCDE [1]); luând pe baza AA_1 lungimile $AB_1 = AB$, $B_1C_1 = BC$ etc., despărţim dreptunghiul $AA'A_1A_1'$ în cinci dreptunghiuri mai mici însemnate: (1), (2),..... (5). Dacă îndoim acum hârtia după muchiile B_1B_1', $C_1C'_1$,..... putem înveli cu ea *exact* suprafaţa laterală a prismei, dreptunghiul (1) suprapunându-se pe faţa $AA'B'B$, dreptunghiul (2) pe faţa $BCC'B'$ etc.

Această operaţiune se chiamă *învelirea* prismei drepte.

Operaţia inversă, adică aşezarea pe un plan, ca în fig. 121, a feţelor unei prisme, se cheamă *desfăşurarea* prismei.

Exemplu. Un paravan este format din feţe dreptunghiulare, care se pot roti în jurul muchiei comune ca o uşe în jurul liniei

---

1) Acest perimetru se poate afla întinzând o sfoară dealungul bazei prismei, astfel ca ea să înconjure exact perimetrul ei.

balamalelor. Ele formează, când paravanul este ca în fig. 122, suprafaţa laterală a unei prisme drepte. Desfăşurarea paravanului pe planul unui perete spre exemplu, se obţine desfăcându-l astfel ca fiecare faţă să coincidă cu planul feţelor vecine (fig. 123).

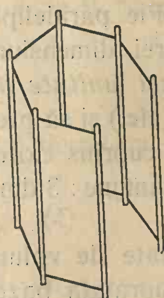


Fig. 122.

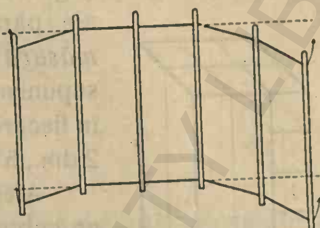


Fig. 123.

Suprafaţa totală S_t a prismei drepte. Fie S aria fiecăreia dintre bazele prismei, iar S_l suprafaţa laterală; prin definiţie:

(2) $$\boxed{S_t = S_l + 2S}$$ *)

Aplicaţie numerică. O prismă dreaptă are ca bază un poligon cu perimetrul $P = 15{,}20$ m., suprafaţa bazei $B = 28$ m²., iar înălţimea $I = 5$ m. Avem:

$$S_l = P \times I = 15{,}20 \text{ m} \times 5 \text{ m} = 76 \text{ m}^2.$$

$$S_t = S_l + 2B = 76 \text{ m}^2 + 2 \times 28 \text{ m}^2 = 132 \text{ m}^2.$$

Observare importantă. In formulele (1) şi (2) de mai sus, atât dimensiunile bazei cât şi ale înălţimei *trebuiesc exprimate în acelaş fel de unităţi* (spre exemplu în cm., dm., m etc.).

Atât suprafaţa laterală cât şi suprafaţa totală a prismei, fiind o *sumă* de arii de dreptunghiuri şi poligoane oarecare (bazele), se exprimă în unităţi de suprafaţă: cm², dm.², m² etc.

Ele provin deci din *înmulţirea a două lungimi*; într'adevăr în formula (1) se înmulţeşte *perimetrul bazei* (o lungime) cu *înălţimea* (tot o lungime); tot astfel în formula (2) sunt doi termeni S_l şi 2S, care reprezintă fiecare câte o arie **).

*) La *prisma oblică* formulele (1) şi (2) sunt aceleaşi cu deosebirea că *înălţimea* I, este înălţimea uneia din feţele laterale.

**) Vezi şi pag. 97; Observare importantă.

Volumul paralelipipedului.

I. Volumul paralelipipedului dreptunghiu. Fie paralelipipedul dreptunghiu (fig. 124); să măsurăm cele trei dimensiuni ale paralelipipedului *cu aceeaşi unitate de măsură* (în cm., în dm., în m., etc.) şi să presupunem că această unitate s'a cuprins *exact* în fiecare din aceste dimensiuni şi anume: 3 dm., 2 dm., 5 dm.

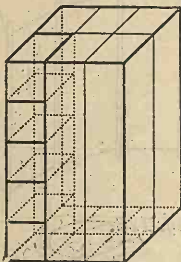


Fig. 124.

Alegem în acest caz ca unitate de volum un cub cu latura de 1 dm.; pe suprafaţa bazei vor încăpea $3 \times 2 = 6$ din aceste cuburi; iar în înălţime putem aşeza 5 straturi de câte 6 cuburi, adică în total volumul paralelipipedului este umplut cu

$$3 \times 2 \times 5 \text{ cuburi}$$

Deci:

$$\text{Volumul paralelipipedului} = 3 \times 2 \times 5 = 30 \text{ dm}^3.$$

De aci:

I. Regula. a). *Volumul unui paralelipiped dreptunghiu, este egal cu produsul dintre cele trei dimensiuni ale lui.*

Sau, observând că $3 \times 2 = 6$ dm². este suprafaţa bazei paralelipipedului, iar 5 este înălţimea lui:

b) *Volumul unui paralelipiped este egal cu suprafaţa bazei înmulţită cu înălţimea.*

Observare importantă. În cazul *a)*, dimensiunile paralelipipedului trebuesc să fie măsurate *cu aceeaşi unitate de lungime* (spre exemplu în cm, dm, m), iar în cazul *b)*, dacă suprafaţa bazei este măsurată în cm², dm², m², ..., atunci înălţimea trebue să fie exprimată respectiv în cm, dm, m.

Aplicaţie. Dimensiunile unui paralelipiped dreptunghiu sunt: 3,14 m; 1,28 m; 6,12 m; să se arate că şi în acest caz volumul $= 3{,}14 \text{ m} \times 1{,}28 \text{ m} \times 6{,}12 \text{ m} = 24{,}557 \text{ m}^3$, adică regula I-a este adevărată chiar când unitatea de lungime aleasă, aci metrul, nu se cuprinde exact în cele trei dimensiuni.

Indicaţie. Se va transforma cele trei lungimi 3,14 m; 1,28 m; 6,12m, în centimetri şi se va repeta raţionamentul de mai sus luând ca unitate de volum cm³; apoi se va transforma cm³. în m³.

In general, dacă însemnăm cele trei dimensiuni ale unui para-

lelipiped dreptunghiu cu a, b, I, iar baza formată cu dimensiunile a şi b, cu B, putem scrie:

(3) $$V = a \times b \times I$$

sau deoarece $B = a \times b$,

(4) $$V = B \times I$$

Aplicaţie numerică. Care este volumul unui paralelipiped dreptunghiu, având ca dimensiuni: 40 cm, 3,4 dm, 0,52 m?

R: Vom exprima toate dimensiunile cu aceeaşi unitate de măsură, spre exemplu cu dm.: 4 dm, 3,4 dm, 5,2 dm; avem:

$$V = 4 \text{ dm} \times 3{,}4 \text{ dm} \times 5{,}2 \text{ dm} = 70{,}72 \text{ dm}^3$$

Observare importantă. Din formulele (3) şi (4) reiese că volumul unui paralelipiped rezultă *din înmulţirea a trei lungimi sau din înmulţirea unei suprafeţe cu o lungime* şi se exprimă în unităţi de volum: cm^3., dm^3., m^3. etc.

2. *Volumul unui paralelipiped drept.*

Exemplu. Să luăm o cutie cu chibrituri (goală) care are forma unui paralelipiped dreptunghiu A′BCD′E′FGH′ (fig. 125) şi să turtim puţin capacul ei în aşa fel ca cele două feţe (1) şi (2), (pe unde se trage cutia) să devină oblice faţă de direcţiunea muchiilor lungi ale cutiei.

Am obţinut astfel dintr'un paralelipiped dreptunghiu, un paralelipiped drept ABCDEFGH.

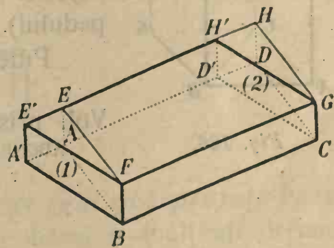


Fig. 125.

Să observăm că volumul cutiei nu s'a schimbat, înălţimea AE a rămas aceeaş, iar bazele, care erau dreptunghiuri (A′BCD′, E′FGH′), au devenit prin deformare paralelograme (ABCDEFGH) echivalente cu acestea; deci:

II. Volumul unui paralelipiped drept este egal cu aria bazei înmulţită cu înălţimea (dimensiunile paralelipipedului sunt măsurate cu aceeaş unitate de măsură).

Observare. La acelaş rezultat se poate ajunge dacă în paralelipipedul drept ABCDEFGH (fig. 125), facem secţiunile drepte

A'BFE' şi CGH'D', iar printr'o mişcare de translaţie aducem solidele A'BAE'FE şi D'CDH'GH să coincidă.

3. Volumul unui paralelipiped oblic[1]. Paralelipipedul oblic se poate obţine prin deformare dintr'un paralelipiped drept, astfel ca volumele lor să fie aceleaşi; se deduce de aci că:

III. Volumul unui paralelipiped oblic este egal cu aria bazei înmulţită cu înălţimea, (dimensiunile paralelipipedului fiind măsurate cu aceeaşi unitate).

Din rezultatele I), II), III), putem conchide:

Volumul unui paralelipiped oarecare, este egal cu aria bazei înmulţită cu înălţimea; (dimensiunile paralelipipedului fiind măsurate cu aceeaşi unitate).

Volumul unei prisme.

I. Volumul unei prisme triunghiulare.

Fie prisma triunghiulară ABCDEF (fig. 126); prin muchiile BE şi CF, ducem plane paralele respectiv cu feţele ACFD şi ABED şi care se taie după dreapta GH.

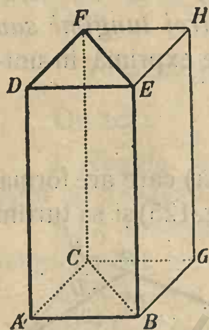


Fig. 126.

Obţinem astfel un paralelipiped ABGCDEHF, format din două prisme triunghiulare ABCDEF şi BCGEFH, care sunt *echivalente* (vezi pag. 65); fie I înălţimea prismei (sau a paralelipipedului).

Putem scri:

$$\text{Vol. prismei}_{\text{ABCDEF}} = \frac{\text{vol. paralelipiped. ABGCDEHF}}{2}$$

$$= \frac{\text{aria bazei (ABGC)} \times I}{2}$$

însă aria bazei ABGC, care este un paralelogram, este de două ori cât aria triunghiului de bază ABC al prismei; deci:

$$\text{Vol. prismei}_{\text{ABCDEF}} = \frac{2 \text{ aria (ABC)} \times I}{2} = \text{aria (ABC)} \times I$$

sau însemnând aria (ABC) = b, găsim:

$$\text{Vol. prismei triunghiulare} = b \times I$$

[1]) Programa nu prevede demonstraţie.

adică:

Volumul unei prisme triunghiulare este egal cu aria bazei înmulţită cu înălţimea.

Observare. Procedeul de mai sus pentru aflarea volumului unui paralelipiped este asemănător aceluia din Geometria Plană, pentru aflarea ariei unui triunghiu.

II. Volumul unei prisme oarecare.

Fie o prismă oarecare, spre exemplu exagonală: ABCDEF, A'B'C'D'E'F', suprafaţa bazei fiind b, înălţimea I şi volumul V; (fig. 127) această prismă se poate descompune într'o sumă de prisme triunghiulare, al căror volum îl putem afla (vezi pag. 70).

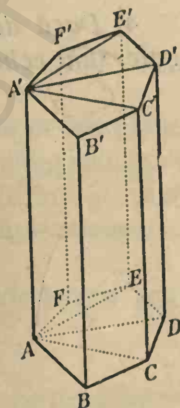


Fig. 127.

Vol. ABCA'B'C' = aria (ABC) × I
Vol. ACDA'C'D' = aria (ACD) × I
Vol. ADEA'D'E' = aria (ADE) × I
Vol. AEFA'E'F' = aria (AEF) × I

Adunând aceste egalităţi membru cu membru şi dând în membrul al doilea pe I ca factor comun, găsim:

$$V = I\,[\text{aria (ABC)} + \text{aria (ACD)} + \text{aria (ADE)} + \text{aria (AEF)}]$$

sau:

$$\boxed{V = b \times I}$$

adică:

Volumul unei prisme oarecare este egal cu suprafaţa bazei înmulţită cu înălţimea, (dimensiunile bazei şi înălţimii prismei sunt măsurate cu aceeaşi unitate de măsură).

Consecinţe. 1. *Volumul unei prisme oblice este egal cu aria secţiunei drepte, înmulţită cu lungimea muchiei* (vezi pag. 70).

2. *Raportul volumelor a două prisme, care au bazele echivalente, este egal cu raportul înălţimilor.*

Fie spre exemplu o prismă de volum V, bază b şi înălţime I şi o a doua de volum V' bază *tot* b şi înălţime I'; putem scrie:

$$V = b \times I \quad \text{şi} \quad V' = b \times I'$$

deci :

$$\frac{V}{V'}=\frac{b\times I}{b\times I'}=\frac{I}{I'}$$

3. *Raportul volumelor a două prisme, de aceeaşi înălţime este egal cu raportul bazelor lor,* adică:

$$\frac{V}{V'}=\frac{b}{b'}$$

4. *Dacă două prisme au bazele echivalente şi înălţimile egale, sunt echivalente.*

REZUMAT.

CAP. VI. PRISMA.

* Poliedru este o figură geometrică, mărginită de feţe plane.

* *Prisma* este un poliedru, care are două feţe poligoane egale şi paralele, numite *baze*, iar celelalte feţe numite *feţe laterale*, sunt paralelograme sau dreptunghiuri, şi au câte o latură comună cu fiecare din baze.

* *Muchiile prismei* sunt liniile de întretăiere ale feţelor laterale cu bazele şi ale feţelor laterale între ele.

Vârfurile prismei sunt intersecţiile muchiilor.

* *Prismă dreaptă* este o prismă cu muchiile perpendiculare pe planele bazelor.

* *Prismă oblică* este o prismă cu muchiile laterale, oblice pe planele bazelor.

* După felul poligonului bază, o prismă poate fi *triunghiulară, patrulateră, pentagonală,* etc.

* *Înălţimea* unei prisme este distanţa dintre planele paralele ale bazelor ei.

* *Paralelipipedul* este o prismă patrulateră, ale cărei baze sunt paralelograme; când muchiile sunt oblice pe planul bazelor, paralelipipedul este *oblic*, iar când muchiile sunt perpendiculare pe planul bazelor, paralelipipedul este drept. Un paralelipiped drept cu bazele dreptunghiuri, se cheamă paralelipiped dreptunghiu.

EXERCIŢII.

1. *Care este lungimea laturii unui cub, a cărui diagonală este de 12 cm?*

R: Avem: $3x^2 = 144$ cm². $x = 6{,}92$ cm.

2. *Incălzind un solid în formă de cub cu latura 1 cm, se constată că în urma dilatării el rămâne tot un cub.*

Se cere să se calculeze cu cât a sporit volumul solidului, dacă după dilatare, latura cubului este de 1,4 cm.

R: Volumul a crescut cu: $(1{,}4)^3 - 1^3 = 1{,}744$ cm³.

3. *Să se calculeze volumul şi greutatea unui corp de fier A, în formă de potcoavă şi a armăturii B, (fig. 128), formate din paralelipipede dreptunghiulare, având dimensiunile din figură.*

(Densitatea fierului 7,8).

R: V. (potcoavei) $= 2 \cdot (250 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}) + 320 \text{ cm} \times 5 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}$
$= 6140$ cm³. $= 6{,}140$ dm³.
G. (potcoavei) $= 6{,}140 \text{ dm}^3 \times 7{,}8 = 47{,}892$ kg.
V. (armăturii) $= 320 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} = 2560$ cm³. $= 2{,}560$ dm³.
G. (armăturii) $= 2{,}560 \text{ dm}^3 \times 7{,}8 = 19{,}968$ kg.

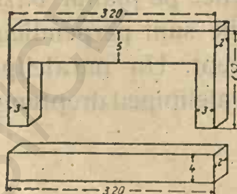


Fig. 128.

4. *O bară de fier în formă de paralelipiped dreptunghiu are secţiunea dreaptă de 6 cm², iar lungimea de 4,50 m.*

Presupunând că prin încălzire fiecare metru din lungimea barei s'a lungit cu 0,00012 m, se cere să se calculeze cu cât a sporit volumul barei.

R: Sporul de volum este:
$6 \text{ cm}^2 \times 450\,(1 + 0{,}00012) - 6 \text{ cm}^2 \times 450 = 0{,}324$ cm³.

5. *Dintr'o bucată de marmoră de forma unei prisme hexagonale, cu latura de 0,6 m. şi cu înălţimea cât lungimea cercului în care ar putea fi înscris poligonul de bază, se ciopleşte o coloană cilindrică aşa fel ca să se piardă cât*

mai puţină marmoră. Care este valoarea materialului pierdut prin cioplire ştiind că un metru cub de marmoră preţuieşte 2.500 lei?

R: V. pr. = 3,520 m³; V. cil. = 3,195 m³; dif. = 0,325 m³; C = 812,50 lei.

6. *Să se calculeze volumul şi greutatea pământului, cu care se formează o prismă dreaptă de lungime 2.400 metri şi având secţiunea dreaptă un trapez* ABCD *cu dimensiunile din figura 129. (Dens. pământului 1,7).*

R. Vol. = 44544 m³ gr. = 75.724,800 t.

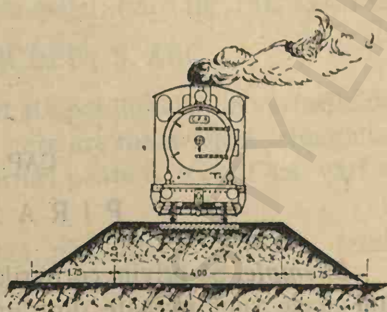


Fig. 129.

7. *Care este volumul pământului săpat în formă de prismă dreaptă de 500 metri lungime, cu secţiunea dreaptă* ABCDEFGHIJKL *cu dimensiunile din figura 130.*

R: V. = 11500 m³.

(Volumul de pământ este săpat în vederea construirii unei şosele).

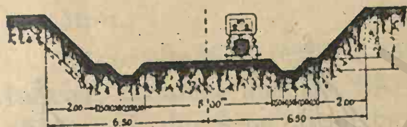


Fig. 130.

8. *Care este greutatea unei grinzi de lemn în formă de paralelipiped dreptunghiu, ştiind că lungimea ei este egală cu 1 m, iar baza este un dreptunghiu cu dimensiunile:*
a) *10 cm şi 20 cm;* b) *8 cm şi 10 cm;* c) *20 cm şi 25 cm.*
Densitatea lemnului este 0,9.

R: *a)* 18000 gr = 18 kg; *b)* 7,200 kg; *c)* 45 kg.

9. *Intr'o baie de formă paralelipipedică, curg două robinete: unul ar umple baia în 18 minute; al doilea, care dă cu 40,5 litri pe minut, mai mult decât primul, ar umple-o în 12 minute. Se cere: 1) volumul băii; 2) dimensiunile ei, ştiind că lăţimea este cât înălţimea şi cât $\frac{1}{2}$ din lungime.*

R: Notând cu x cantitatea de apă dată pe minut de primul robinet, avem:

$18\,x = (x + 40,5) \times 12 \qquad x = 81$ l.

Vol. $= 81 \times 18 = 1458$ l. $= 1458$ dm³.

Notând cu y lăţimea băii, avem:

$2y^3 = 1457$ l. $\quad y^3 = 729 \qquad y = 9$ dm.

(9 dm., 18 dm., 9 dm.)

CAP. VII.

PIRAMIDA.

Exemple. Să privim corpurile geometrice din figură; observăm că ele sunt formate dintr'un poligon (triunghiu, patrulater, pentagon, exagon, ...), care se numeşte *bază* şi din triunghiuri cari unesc un punct S *exterior* planului bazei cu vârfurile acestei baze; aceste triunghiuri se cheamă *feţe laterale.*

Astfel în fig. 131 *baza* este un pătrat, iar *feţele laterale* triunghiuri isoscele; în fig. 132 baza este un exagon *oarecare,* iar

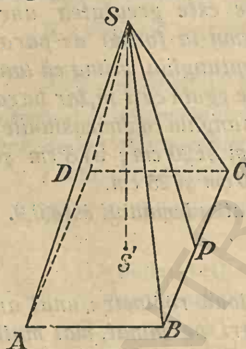


Fig. 131.

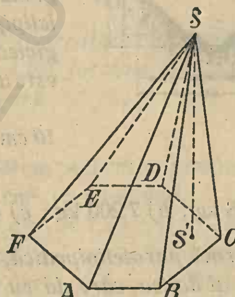


Fig. 132.

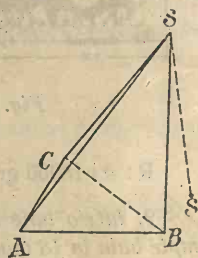


Fig. 133.

feţele laterale nişte triunghiuri *oarecari;* în fig. 133, atât baza cât şi feţele laterale sunt triunghiuri oarecari.

Să se observe că în ultimul caz *orîcare* din triunghiurile acestui corp geometric poate fi luat ca bază.

Definiţie. *Un poliedru care are o faţă un poligon oarecare numit bază, iar celelalte feţe laterale triunghiuri oarecari, formate prin unirea unui punct exterior bazei cu vârfurile acesteia, se cheamă piramidă.*

Vârful comun tuturor feţelor laterale este *vârful* piramidei.
In fig. 131, 132, 133, vârful piramidei este S.

Laturile bazei se numesc *muchiile de bază* ale piramidei, iar dreptele cari unesc vârful piramidei cu vârfurile poligonului de bază sunt *muchiile laterale* ale piramidei.

O piramidă se scrie şi se citeşte astfel: (vezi fig. 131, 132, 133).

S. ABCD ; S. ABCDEF ; S. ABC

adică se scrie întâi litera dela vârf şi apoi literele din vârfurile poligonului de bază (la o piramidă care are toate feţele triunghiuri, fig. 133, oricare din cele patru vârfuri poate fi socotit ca vârf al piramidei).

După felul poligonului de bază, piramida se numeşte: *triunghiulară, patrulateră, pentagonală, exagonală* etc.

Inălţimea unei piramide este lungimea perpendicularei coborîte din vârful piramidei pe bază. In fig. 131, 132, 133, înălţimile piramidelor sunt S S′.

Piramidă regulată este o piramidă, care are drept bază un poligon *regulat*, iar piciorul înălţimii cade în centrul bazei.

Piramida S. ABCD (fig. 131), este o piramidă regulată cu baza un pătrat.

Intr'o piramidă regulată toate feţele laterale sunt triunghiuri isoscele, deoarece muchiile SA, SB, SC..., sunt egale între ele ca oblice duse din S pe planul bazei şi ale căror picioare A, B, C,.. sunt egal depărtate de piciorul S′ al perpendicularei SS′.

Inălţimea unuia oarecare din triunghiurile egale SAB, SBC, se cheamă *apotema* piramidei; ea uneşte vârful S al piramidei cu mijlocul uneia oarecare din laturile poligonului de bază. Spre exemplu SP (fig. 131).

Piramidă neregulată (oblică). O piramidă care nu întruneşte condiţiunile de mai sus, se cheamă *piramidă neregulată ;* aceasta fie că poligonul de bază este regulat, dar piciorul înălţimii nu cade în centrul bazei (fig. 132, 133), fie că nici poligonul de bază nu este regulat.

Piramidele neregulate se numesc şi oblice; la o piramidă oblică piciorul înălţimii poate cădea în interiorul poligonului de bază (fig. 132), sau în exteriorul lui (fig. 133).

Tetraedru este o piramidă triunghiulară, adică o piramidă care are *toate* feţele (şi baza şi feţele laterale) triunghiuri.

Oricare din aceste feţe poate fi luată ca *bază* şi oricare din vârfuri poate fi luat ca vârful tetraedrului.

In fig. 134 se arată un tetraedru *regulat* (piciorul înălţimii cade în centrul bazei, care este un triunghiu echilateral).

In fig. 133 se arată un tetraedru oarecare, neregulat sau oblic.

Dacă toate feţele unui tetraedru sunt triunghiuri *echilaterale*, tetraedrul este *echilateral*.

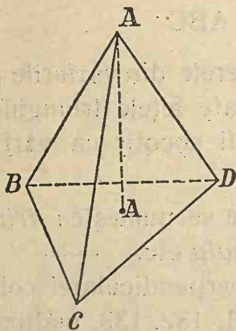


Fig. 134.

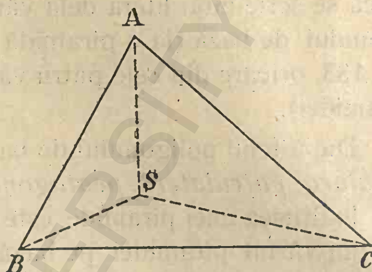


Fig. 135.

Dacă trei din muchiile care se întâlnesc în acelaş vârf al tetraedrului sunt perpendiculare două câte două, tetraedrul se numeşte *tridreptunghiu* (fig. 135).

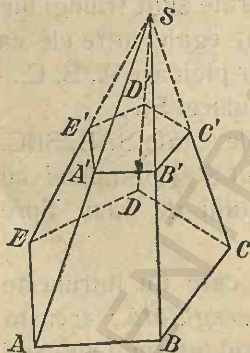


Fig. 136.

Teoremă. Poligonul de secţiune, obţinut prin tăierea unei piramide cu un plan paralel cu baza, este asemenea cu poligonul bazei.

Fie piramida S. ABCDE (fig. 136) şi secţiunea A'B'C'D'E' obţinută printr'un plan paralel cu baza; voim să dovedim că poligoanele ABCDE şi A'B'C'D'E' sunt asemenea.

Trebuie deci să arătăm că unghiurile corespunzătoare sunt *egale* şi laturile omoloage *proporţionale*.

Observând că planele ABCDE, A'B'C'D'E' sunt tăiate de planele SAB, SBC, SCA etc., dreptele de intersecţie sunt paralele şi în cazul de faţă, *îndreptate şi în acelaş sens* adică:

$$AB \parallel A'B', \; BC \parallel B'C', \; CA \parallel C'A' \text{ etc.}$$

rezultă că unghiurile formate sunt egale.

$$\hat{A} = \hat{A}', \; \hat{B} = \hat{B}', \; \hat{C} = \hat{C}', \; \hat{D} = \hat{D}', \; \hat{E} = \hat{E}'.$$

Din triunghiurile asemenea SAB, SA′B′, rezultă:

$$(1) \qquad \frac{AB}{A'B'} = \frac{SB}{SB'}$$

Din triunghiurile asemenea SBC, SB′C′ avem :

$$(2) \qquad \frac{BC}{B'C'} = \frac{SB}{SB'} = \frac{SC}{SC'}$$

din (1) şi (2) deducem:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Tot astfel din triunghiurile asemenea SCD, SC′D′ găsim:

$$\frac{CD}{C'D'} = \frac{SC}{SC'}$$

care comparată cu (2) ne dă:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}$$

În acelaş mod găsim relaţiile:

$$(3) \qquad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}$$

adică raportul laturilor omoloage este egal cu raportul distanţelor dela vârful piramidei la baza ei şi la planul de secţiune ceeace ne arată că şi *laturile omoloage ale poligoanelor* ABCDE, A′B′C′D′E′ *sunt proporţionale.*

Raportul de proporţionalitate (sau de asemănare) este egal cu unul din rapoartele egale:

$$\frac{SA}{SA'} = \frac{SB}{SB'} = \frac{SC}{SC'}$$

adică cu raportul muchiilor laterale a piramidelor SABCDE şi S′A′B′C′D′E′.

Aplicaţie. Să ducem înălţimea care înţeapă planul A′B′C′D′E′ în O′ iar planul ABCDE în O; dreptele OB, O′B′ sunt paralele ca intersecţii ale planului SOB cu două plane paralele, deci şi triunghiurile SOB, SO′B′ sunt asemenea. de unde rezultă:

$$(4) \qquad \frac{SB}{SB'} = \frac{SO}{SO'}$$

Din relaţiile (1) şi (4), obţinem:

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{SO}{SO'}$$

şi în mod analog putem stabili că:

$$\frac{BC}{B'C'}=\frac{SO}{SO'},\quad \frac{CA}{C'A'}=\frac{SO}{SO'}\quad \text{etc.}$$

adică:

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EA}{E'A'}=\frac{SO}{SO'}$$

Consecinţe. Din asemănarea poligoanelor ABCDE, A'B'C'D'E', de arii $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{A}'$, rezultă:

1. *Raportul dintre aria bazei unei piramide şi aria poligonului de secţiune, obţinut printr'un plan paralel cu baza, este egal cu raportul pătratelor distanţelor lor dela vârful piramidei, sau cu raportul pătratelor muchiilor laterale a piramidei, socotite dela vârf până la ele.*

Într'adevăr, s'a stabilit în Geometria Plană, că raportul ariilor a două poligoane asemenea, în cazul de faţă a poligoanelor ABCDE, A'B'C'D'E', este egal cu pătratul raportului de asemănare, adică:

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}$$

dar în baza celor de mai sus: $\frac{AB}{A'B'}=\frac{SO}{SO'}=\frac{SA}{SA'}$

deci:

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}'}=\frac{\overline{(AB)}^2}{\overline{(A'B')}^2}=\frac{\overline{SO}^2}{\overline{SO'}^2}=\frac{\overline{SA}^2}{\overline{SA'}^2}$$

2. *În două piramide, care au aceeaşi înălţime, ariile poligoanelor de secţiune obţinute prin plane paralele cu bazele duse la aceeaşi distanţă de vârf, sunt într'un raport egal cu raportul ariilor celor două baze.*

Într'adevăr, fie I înălţimea comună celor două piramide, *d* distanţa dela vârf, la care ducem planul de secţiune; A şi A',

A_1 şi A_1' ariile bazelor şi ale poligoanelor de secţiune în cele două piramide ; putem scrie în baza consecinţei 1 :

$$\frac{A}{A'} = \frac{l^2}{d^2} \qquad \frac{A_1}{A_1'} = \frac{l^2}{d^2}$$

deci :

$$\frac{A}{A'} = \frac{A_1'}{A_1'}$$

sau :

$$\boxed{\frac{A'}{A_1'} = \frac{A}{A_1}}$$

3. *In două piramide, care au bazele echivalente şi înălţimile egale, poligoanele de secţiune făcute la aceeaş distanţă de vârf, au arii echivalente.*

Prin ipoteză, $A = A_1$, deci şi $A' = A_1'$

Aplicaţie. Într'o piramidă patrulateră aria bazei este 16 cm², iar înălţimea 4 cm. ; la o distanţă de vârf egală cu 1 cm. se duce un plan paralel cu baza ; care este aria A a poligonului de secţiune ?

R : Putem scrie :

$$\frac{A}{16 \text{ cm}^2} = \frac{1 \text{ cm}}{4 \text{ cm}}$$

deci :

$$A = \frac{16 \text{ cm}^2 \times 1 \text{ cm}}{4 \text{ cm}} = 4 \text{ cm}^2$$

Suprafaţa piramidei. Suprafaţa laterală a unei piramide regulate, este prin definiţie suma ariilor feţelor laterale. O vom nota cu S_l.

Piramida fiind regulată, feţele laterale sunt triunghiuri isoscele, care au ca bază o latură a poligonului de bază, iar ca înălţime apotema *a* a piramidei. Deci (fig. 131):

$$S_l = \frac{AB \times a}{2} + \frac{BC \times a}{2} + \frac{CD \times a}{2} + \ldots .$$

sau :

$$S_l = \frac{a}{2}(AB + BC + CD' + \ldots .)$$

Însemnând cu p perimetrul bazei, obţinem:

$$(1) \qquad \boxed{S_l = \frac{p \times a}{2}}$$

adică:

Suprafaţa laterală a unei piramide regulate este egală cu perimetrul bazei înmulţit cu apotema piramidei. (Atât perimetrul cât şi apotema sunt măsurate cu aceeaş unitate, spre exemplu în *cm, dm, m).*

Suprafaţa totală a piramidei este egală cu suprafaţa laterală, la care se adaogă suprafaţa bazei. O vom nota cu S_t.

Deci:

$$(2) \qquad S_t = S_l + A = \frac{p \times a}{2} + B$$

(toate dimensiunile sunt măsurate cu aceeaş unitate: lungimile p şi a în cm, dm, m, ..., iar aria B, respectiv în cm^2, dm^2, m^2).

Aplicaţie. O piramidă regulată cu baza un exagon, cu latura de 1 dm, are apotema de 30 cm. Care este suprafaţa laterală şi suprafaţa totală a piramidei?

$$R: \quad S_l = \frac{p \times a}{2} = \frac{6 \text{ dm} \times 3 \text{ dm}}{2} = 9 \text{ dm}^2.$$

$$S_t = 9 \text{ dm}^2 + \frac{6 \times 1 \text{ dm} \sqrt{3} \text{ dm}}{4} = 11{,}5950 \text{ dm}^2.$$

Volumul piramidei.

Fie o piramidă triunghiulară S. ABC; prin vârful S ducem SA′ egal şi paralel cu AB, SC′ egal şi paralel cu BC; rezultă că triunghiurile ABC şi SA′C′ sunt egale şi situate în plane paralele (vezi 26).

S'a format astfel o prismă ABCSA′C′, cu muchiile laterale AA′ = BS = CC′.

Să observăm că planele SAC şi SA′C descompun această prismă în trei piramide:

1. S. ABC 2. S. CC′A′ 3. S. ACA′

Dacă am realiza această prismă dintr'un corp solid şi omogen [1]),

---

[1]) Corp omogen este un corp constituit din aceeaşi materie (lemn, fier, etc.) iar materia este la fel de *densă* în toate părţile lui.

(lemn, fier etc.) şi am desface-o în cele trei piramide, pe care le-am *cântări,* am constata că *au aceeaşi greutate.*

Aceasta însemnează, că cele trei piramide (care sunt făcute din aceeaşi materie şi sunt omogene) au acelaş volum, egal cu o treime din volumul prismei.

Rezultă de aci:

I. Volumul unei piramide triunghiulare este a treia parte din volumul unei prisme care are aceeaşi bază şi aceeaşi înălţime ca a piramidei, adică:

(Aria bazei B şi înălţimea I sunt măsurate cu aceeaşi unitate de măsură: cm^2 şi cm, sau dm^2 şi dm, sau m^2 şi m).

(1) $$\boxed{V=\frac{B\times I}{3}}$$

2. Să considerăm acum o piramidă oarecare, spre exemplu, SABCDEF cu baza un exagon oarecare.

Ducând prin vârful A, diagonalele AC, AD, AE, planele SAC, SAD, SAE, descompun această piramidă în patru piramide triunghiulare, deci volumul piramidei exagonale este egal cu suma volumelor piramidelor triunghiulare, adică:

$$V=\frac{(\text{aria } ABC)\,I}{3}+\frac{(\text{aria } ACD)\,I}{3}+\frac{(\text{aria } ADE)\,I}{3}+\frac{(\text{aria } AEF)\,I}{3}$$

şi dând pe $\frac{I}{3}$ în factor comun:

$$V=\frac{I}{3}\,[\text{aria }(ABC)+\text{aria }(ACD)+\text{aria }(ADE)+\text{aria }(AEF)]$$

sau:

$$V=\frac{\text{aria }(ABCDEF)\times I}{3}$$

deci:

II. Volumul unei piramide oarecare este egal cu a treia parte din produsul ariei bazei prin înălţimea ei.

(Aria bazei cât şi înălţimea sunt măsurate cu aceeaşi unitate de măsură, spre exemplu cm^2 şi cm, dm^2 şi dm, m^2 şi m).

(2) $$\boxed{V=\frac{B\times I}{3}}$$

Consecinţe. 1. *Din formula (2) rezultă că orice piramidă poate fi considerată ca a treia parte dintr'o prismă cu aceeaşi bază şi aceeaşi înălţime ca şi piramida.*

2. *Raportul între volumele a două piramide care au aceeaşi bază, este egal cu raportul înălţimelor lor.*

Raportul între volumele a două piramide, care au aceeaşi înălţime, este egal cu raportul ariilor bazelor lor.

***Trunchiu de piramidă** este corpul geometric ce se obţine dacă tăiem o piramidă cu un plan paralel cu baza ei şi înlăturăm piramida cea mică.*

În figura 136 se arată un trunchiu de piramidă ABCDE A'B'C'D'E' obţinut tăind piramida S. ABCDE prin planul A'B'C'D'E' paralel cu baza ABCDE şi înlăturând piramida mică S. A'B'C'D'E'.

Înălţimea unui trunchiu de piramidă este distanţa între planele paralele ale celor două baze.

Trunchiu de piramidă regulat este acela care rezultă dintr'o piramidă regulată; în cazul acesta, feţele laterale ale trunchiului de piramidă sunt trapeze isoscele egale.

Înălţimea unuia oarecare din aceste trapeze, se numeşte *apotema* trunchiului de piramidă regulat.

Exemplu. Unele greutăţi care servesc la cântărirea corpurilor, au forma unui trunchiu de piramidă regulat. (Vezi fig. 194).

Suprafaţa laterală a unui trunchiu de piramidă regulat.

Feţele laterale fiind trapeze isoscele de apotemă a, aria trapezului ABA'B' spre exemplu (fig. 136), este:

$$\frac{AB + A'B'}{2} a = \frac{AB \times a + A'B' \times a}{2}$$

deci suprafaţa laterală S_l a trunchiului de piramidă are expresiunea:

$$S_l = \frac{1}{2}[(AB + BC + CD + \ldots)a + (A'B' + B'C' + C'D' + \ldots)a]$$

sau însemnâd cu P şi p perimetrele celor două baze:

$$(3) \qquad S_l = \frac{(P + p)\, a}{2}$$

adică:

Suprafaţa laterală a unui trunchiu de piramidă regulat, este egală cu semisuma perimetrelor celor două baze, înmulţită cu apotema trunchiului.

Suprafaţa totală S_t a unui trunchiu de piramidă regulat este egală cu suprafaţa laterală la care se adaugă suma ariilor B şi b' a celor două baze:

$$S_t = \frac{P + p}{2} \times a + B + b'$$

Aplicaţie. Un trunchiu de piramidă regulat, are ca baze triunghiuri echilaterale; latura bazei mari este egală cu 3 dm, iar latura bazei mici este de 1 dm; apotema trunchiului este $a = 2$ dm; să se calculeze suprafaţa laterală şi suprafaţa totală.

R: $P = 3 \times 3 \text{ dm} = 9 \text{ dm}; \quad p = 3 \times 1 \text{ dm} = 3 \text{ dm}$

$$B = \frac{3^2 \sqrt{3}}{4} = 3{,}8925 \text{ dm}^2 \quad b' = \frac{1^2 \sqrt{3}}{4} = 0{,}443 \text{ dm}^2$$

$$S_l = \frac{(9 + 3) \text{ dm}}{2} \times 2 \text{ dm} = 12 \text{ dm}^2$$

$$S_t = 12 \text{ dm}^2 + 1{,}8925 \text{ dm}^2 + 0{,}443^3 \text{ dm}^2 = 16{,}3358 \text{ dm}^2$$

Volumul trunchiului de piramidă. Insemnând cu *B* aria bazei mari, cu *b* aria bazei mici şi cu I înălţimea unui trunchiu de piramidă, volumul său V este dat de formula:

$$(4) \qquad V = \frac{I}{3} (B + b + \sqrt{B \times b})$$

în care *B*, *b* şi I sunt exprimate în aceleaşi unităţi de măsură, spre exemplu; cm^2 şi cm, dm^2 şi dm, m^2 şi m, etc.

Aplicaţie. O piramidă are aria bazei $B = 17 \text{ cm}^2$, *iar înălţimea* $I = 3$ *cm; la o distanţă de 2 cm. dela vârf, ducem un plan paralel cu baza. Să aflăm volumul piramidei şi al trunchiului de piramidă.*

R: 1. V. piramidei $= \dfrac{17 \text{ cm}^2 \times 3 \text{ cm}}{3} = 17 \text{ cm}^3$

2. Aria b a bazei mici este dată de relaţia : (vezi pag. 80).

$$\frac{b}{17}=\frac{2^2}{3^2}, \quad b=\frac{4\times 17\ \text{cm}^2}{9}=7{,}55\ \text{cm}^2$$

deci :

$$V=\frac{1}{3}\ \text{cm}(17\ \text{cm}^2+7{,}55\ \text{cm}^2+\sqrt{17\ \text{cm}^2\times 7{,}55\ \text{cm}^2})=11{,}956\text{cm}^3$$

Exerciţii.

Să se arate că formula (4) este omogenă.

R : Se va observa că $\sqrt{B\times b}$ reprezintă o arie, etc.

REZUMAT.

CAP. VII. — PIRAMIDA.

* Piramida este un poliedru care are o faţă un poligon oarecare, numit *bază,* iar celelalte *feţe laterale,* triunghiuri oarecare, formate prin unirea unui punct exterior bazei cu vârfurile acesteia.

* Piramidă regulată este aceia care are ca bază un poligon regulat, iar piciorul înălţimii cade în centrul bazei.

Piramidele care nu îndeplinesc aceste condiţiuni sunt *neregulate* sau *oblice.*

* *Tetraedrul* este o piramidă care are toate feţele triunghiuri; dacă toate feţele sunt triunghiuri echilaterale, tetraedrul se cheamă echilateral.

* Poligonul de secţiune, obţinut prin tăierea unei piramide cu un plan paralel cu baza, este asemenea cu poligonul bazei.

Raportul de asemănare, între poligonul de secţiune şi poligonul de bază, este egal cu raportul distanţelor dela vârf la planul de secţiune şi la bază, sau cu raportul muchiilor celor două piramide, astfel formate.

* Fie p perimetrul bazei unei piramide, a apotema piramidei, I înălţimea piramidei, B aria bazei.

$$S_l \text{ (suprafaţa laterală a piramidei)} = \frac{p \times a}{2}$$

$$S_t \text{ (totală)} = \frac{p \times a}{2} + B$$

$$V \text{ (volumul piramidei)} = \frac{B \times I}{3}$$

* *Trunchiu de piramidă* este corpul geometric ce se obţine prin tăierea unei piramide cu un plan paralel cu baza şi înlăturând piramida cea mică.

* Fie P şi p perimetrele celor două baze ale trunchiului de piramidă; B şi b ariile celor două baze; a apotema trunchiului, iar I înălţimea sa:

$$S \text{ laterală} = \frac{P + p}{2} \times a$$

$$S \text{ totală} = \frac{P + p}{2} \times a + B + b$$

$$\text{Volumul} = \frac{I}{3} (B + b + \sqrt{B \times b}).$$

EXERCIŢII.

1. *Suprafaţa laterală a unei piramide hexagonale este de 46 m² iar suprafaţa totală de 85 m². Care e volumul acestei piramide?*

R: B = S. tot. — S. lat. = 39 m². I = 4,23 m. Vol. = 54,990 m³.

2. *Volumul unei piramide drepte cu baza un triunghiu echilateral este de 420 dm³ şi înălţimea este de 15 dm. Să se calculeze suprafaţa totală a acestei piramide.*

R: $B = \frac{420 \times 3}{15} = 84$ dm². Raza cercului circumscris este 8,04 dm.

$A^2 = 15^2 + 4{,}02^2$. A = 15,53 dm. S. tot. = 408,014814 dm².

3. *Apotema* A *a unei piramide drepte cu baza un patrat este de 8 dm, iar una din muchii* m *este de 10 dm. Să se calculeze suprafaţa laterală, suprafaţa totală şi volumul acestei piramide.*

R: $\left(\frac{l}{2}\right)^2 = m^2 - A^2$. $l = 12$ dm. S. lat. = 192 dm². S. tot = 336 dm².
Vol. = 254,016 dm³.

4. *O piramidă dreaptă cu baza un romb, are înălţimea de trei ori mai mare ca latura bazei. Să se afle volumul acestei piramide ştiind că o treime a sumei diagonalelor, adunată cu jumătatea diferenţei lor, dă 3,5 m şi jumătatea diagonalei mari, adunată cu 1/6 din suma diagonalelor, este 4 m.*

Fie D, *d* diagonalele rombului, I înălţimea piramidei şi V volumul; găsim:

R: D = 5 m; d = 4 m; I = 3 × 3,2 = 9,6 m;

$V = \frac{10 \times 9{,}6}{3} = 32$ m².

5. *Să se calculeze volumul piramidei drepte cu baza un dreptunghiu cu perimetrul de 22 dm., a cărui lungime este cu 4 dm. mai mare ca lăţimea, înălţimea piramidei fiind dublul diagonalei bazei.*

R: x fiind lungimea şi y lăţimea avem: $x + y = 11$.
$x - y = 4$.

$x = 7{,}5$ $y = 3{,}5$ $I = 2\sqrt{7{,}5^2 - 3{,}5^2} = 2 \times 6{,}6 = 13{,}2$ dm.
Vol. = 115,500 dm³.

6. *O piramidă dreaptă cu baza pătrat are înălţimea de 6 dm şi muchia de 10 dm. Care e volumul trunchiului de piramidă obţinut printr'o secţiune paralelă cu baza, făcută la 2/3 din înălţime, socotită dela vârf?*

R: $R = \sqrt{m^2 - y^2} = 8$ dm. $\frac{L}{l} = \frac{6}{4}$ $l = \frac{16\sqrt{2}}{3}$ Vol. tr. $= 180{,}148$ dm³

7. *Înălţimea unei piramide drepte cu baza în formă de triunghiu echilateral este de $2\sqrt{6}$ dm., iar diferenţa dintre apotema piramidei şi apotema bazei este de 2 dm. Se cere: 1. Volumul piramidei. 2. La ce distanţă de vârf trebue făcută o secţiune paralelă cu baza pentru ca volumele celor două solide astfel obţinute să fie echivalente?*

R: Notând cu x apotema piramidei şi cu y apotema bazei, avem sistemul

$x^2 - y^2 = 24.$ $x = 7$ dm. $y = 5$ dm.

$x - y = 2.$ $i = 3{,}862$ dm.

Vol. $= 207{,}600$ dm³.

CAP. VIII.

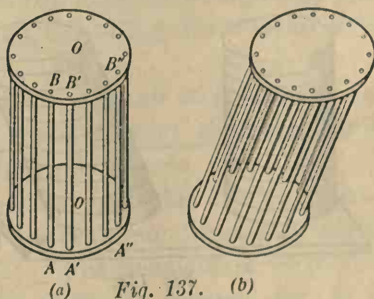
CILINDRUL.

Exemple. 1. Să tăiem o scândură subţire în formă de cerc şi să însemnăm cu O centrul cercului; apoi să fixăm un *număr mare* de vergele de sârmă AB, A'B', A"B", . . ., *de aceeaşi lungime*, cu unul din capetele lor A, A', A", . . ., pe marginea cercului O, iar vergelele să fie perpendiculare pe planul acestui cerc (fig. 137 *a*).

Observăm că toate vergelele *la un loc* dau naştere la o suprafaţă, care *seamănă* cu aceea care mărgineşte o cutie de conserve, cu atât mai mult, cu cât vergelele sunt mai numeroase şi mai dese.

Capetele B, B', B", . . ., se găsesc faţă de planul cercului O, la aceeaşi distanţă, deoarece vergelele AB, A'B', A"B", . . ., sunt egale între ele şi perpendiculare pe planul acestui cerc.

Punctele B, B', B", . . ., sunt situate deci într'un plan paralel cu planul cercului O.



(*a*) *Fig. 137.* (*b*)

Dacă am tăia din lemn un al doilea cerc de centru O' şi egal cu cercul O, şi l'am sprijini pe vergelele de sârmă, am constata că marginea lui se aşează *exact* pe capetele B, B', B", . . ., ale acestor vergele.

Am obţinut astfel un corp geometric în forma unei colivii şi care este mărginit în lături de o suprafaţă curbă, iar sus şi jos prin câte un cerc.

Acest corp geometric se numeşte *cilindru*.

Cercurile O şi O', sunt *bazele* cilindrului; vergelele AB, A'B', . . ., sunt *generatoarele* lui, iar suprafaţa curbă pe care aceste generatoare o formează este *suprafaţa laterală* a cilindrului.

Această *suprafaţă* se cheamă şi *suprafaţă cilindrică.*

Segmentul de dreaptă OO′, care uneşte centrele bazelor, este *înălţimea* (sau axa) cilindrului; ea este paralelă şi egală cu generatoarele lui şi este perpendiculară pe baze.

Deoarece generatoarele cilindrului sunt perpendiculare pe bazele lui, care sunt cercuri, se zice că *cilindrul este circular drept.*

Observare. Dacă procedăm la fel ca mai sus, însă aşezăm vergelele *înclinat* pe baza cercului O, având grijă ca toate vergelele să fie *egale şi paralele între ele*, obţinem un corp geometric care se numeşte *cilindru circular oblic* (fig 137 *b*). Şi acest cilindru are două baze: cercurile O şi O′, situate în plane paralele; generatoarele sunt AB, A′B′, A″B″, ... Linia centrelor OO′, nu mai este perpendiculară pe baze, ci este paralelă şi egală cu generatoarele.

De data aceasta, înălţimea cilindrului oblic este prin definiţie distanţa între planele bazelor, distanţă ce se măsoară pe perpendiculara cuprinsă între planele paralele ale acestor baze.

Observare. Cilindrul oblic de mai sus se poate obţine din cilindrul drept, dacă ţinem fix cercul de bază O, şi tragem uşor cercul O′ spre dreapta sau spre stânga.

2. Să fixăm perpendicular pe suprafaţa unei mese plane, un ac lung de metal (undrea).

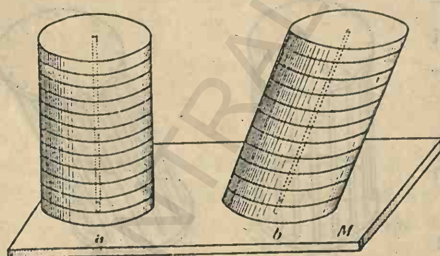


Fig. 138.

Să tăiem dintr'un carton, un număr *foarte mare* de cercuri egale şi să le înfigem cu centrele lor O_1, O_2, O_3, ..., în acul de metal (fig. 138 *a*), astfel ca ele să se aştearnă unul peste altul.

Marginile tuturor acestor cercuri dau naştere unei suprafeţe, care *seamănă* cu aceea care mărgineşte o cutie de conserve şi aceasta cu atât mai mult cu cât cercurile sunt mai multe şi mai dese.

Corpul geometric astfel obţinut şi limitat la două cercuri, cel mai de jos şi cel mai de sus, este un *cilindru circular drept.*

Centrele O_1, O_2, O_3, ..., ale acestor cercuri, se găsesc pe acul de metal, care este *axul cilindrului.*

Dacă acul de mai sus, ar fi înfipt *oblic* pe masă şi am repeta operaţia de mai sus, am obţine un *cilindru circular oblic* (fig. 138 *b*).

3. Să luăm un cadru de sârmă în formă de dreptunghiu ABCD (fig. 139), pe care să-l rotim de 180^0 în jurul unei sârme *fixe* OO′, care trece prin mijlocul O al laturei AD şi prin mijlocul O′ al laturei BC.

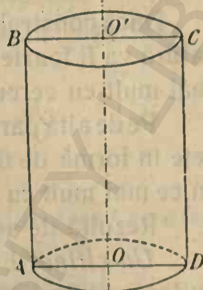


Fig. 139.

Latura AB (sau latura CD) va descrie o *suprafaţă cilindrică.*

Punctul A (sau D), va descri un cerc cu centrul în O, iar punctul B (sau C), un cerc cu centrul în O′.

Corpul geometric, care este mărginit de suprafaţa cilindrică şi de cele două cercuri se numeşte cilindru de revoluţiune, sau cilindru circular drept.

Dreapta AB (sau CD) este generatoarea cilindrului şi deoarece ea poate ocupa în spaţiu în timpul rotaţiei oricât de multe poziţiuni, rezultă că cilindrul are oricât de multe generatoare, toate paralele între ele.

Cercurile O şi O′ sunt bazele cilindrului. Raza cercului O (sau O′) se cheamă *raza* cilindrului, iar distanţa OO′ este înălţimea sa.

Dreapta OO′ este axa cilindrului.

Observare. Dacă am putea fixa una din laturile dreptunghiului, spre exemplu pe AB şi dacă am roti acest dreptunghiu în jurul ei, am obţine deasemeni un cilindru; CD ar fi *generatoarea* şi AB *axa* lui.

Se poate spune deci, că *cilindrul circular drept poate lua naştere prin rotirea unui dreptunghiu în jurul uneia din laturile sale.*

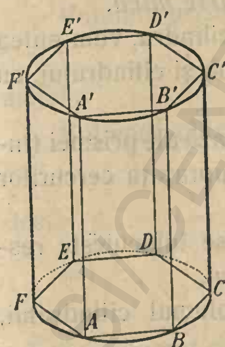


Fig. 140.

Observare. In exemplul 1) s'a construit un cilindru cu ajutorul unor vergele de sârmă AA′, BB′, CC′,..., perpendiculare pe planele a două cercuri O şi O′, capetele lor A, B, C,..., şi A′, B′, C′,..., fiind pe aceste cercuri.

S'a arătat atunci că pentru ca acest corp să *semene* cât mai mult cu un cilindru, trebue să folosim *cât mai multe vergele şi cât mai apropiate între ele.*

Să luăm pe cercul O, punctele A, B,C,..., (fig. 140), la *distanţe egale;* punctele A′, B′, C′, ..., vor fi şi ele egal depărtate două câte două, pe cercul O′. Obţinem astfel două *poligoane regulate* ABCDEF şi

A'B'C'D'E'F', înscrise în cele două cercuri, iar prin unirea punctelor A şi A', B şi B', C şi C',..., căpătăm o *prismă regulată dreaptă*, care este *înscrisă* în cilindru.

Dacă construim poligoanele de bază cu foarte multe laturi, fiecare latură va fi foarte mică, iar aceste poligoane *vor semăna* din ce în ce mai mult cu cercurile O şi O', *apropiindu-se* foarte mult de ele.

Pe de altă parte, prisma dreaptă va avea un număr foarte mare de feţe în formă de dreptunghiuri, ca AB B'A' — şi va *semăna* din ce în ce mai mult cu cilindrul drept, care are ca baze cercurile O şi O'.

Rezultă de aci că:

Un cilindru circular drept poate fi privit ca o prismă regulată cu un număr foarte mare de feţe, fiecare faţă fiind foarte mică.

Exemplu. Dacă un creion neascuţit, care este de obiceiu o prismă regulată exagonală sau octogonală, ar fi in forma unei prisme regulate cu un număr foarte mare de feţe, am avea impresia că creionul este rotund, în formă de cilindru.

Referindu-ne tot la exemplul 1), dacă am aşeza cât mai multe vergele, *înclinate* însă pe planul bazelor, şi astfel ca să obţinem o *prismă oblică* având ca baze două poligoane regulate, corpul geometric rezultat se va apropia cu atât mai mult de un cilindru oblic, cu cât numărul feţelor prismei oblice va fi mai mare.

Putem conchide deci că:

Atât cilindrul circular drept, cât şi cilindrul circular oblic, pot proveni dintr'o prismă dreaptă sau oblică, cu un număr foarte mare de feţe, fiecare din feţe fiind foarte mică.

Din cauza acestei înrudiri între prismă şi cilindru, vom putea aplica proprietăţile şi rezultatele aflate la prismă şi cilindrului, cu următoarele schimbări:

1. Perimetrul şi suprafaţa poligoanelor de bază ale prismei (înscrise), se înlocuiesc respectiv cu lungimea şi suprafaţa cercurilor de bază ale cilindrului.

2. Suprafaţa laterală şi totală a prismei se înlocuieşte respectiv cu suprafaţa laterală şi totală a cilindrului.

3. Volumul prismei se înlocuieşte cu volumul cilindrului, precum se arată în cele ce urmează:

I. Suprafaţa laterelă a unui cilindru circular drept.

S'a stabilit însă (pag. 66) că suprafaţa laterală a unei prisme regulate este:

(prismă) S_l = perimetrul poligonului de bază $\times$ înălţimea.

În baza celor de mai sus, în cazul cilindrului, care este o prismă cu un număr foarte mare de feţe:

$S_{l\ cilindru}$ = lungimea cercului de bază $\times$ înălţimea.

Să însemnăm cu R, raza unuia din cercurile de bază şi cu I, înălţimea cilindrului, avem:

(1) $$S_l = 2\pi R \times I$$

adică: *suprafaţa laterală a unui cilindru circular drept se află înmulţind lungimea cercului de bază cu înălţimea.*

II. Suprafaţa totală a cilindrului circular drept.

Se obţine adăogând la suprafaţa laterală suprafeţele celor două cercuri de bază, adică:

$$S_t = 2\pi R \times I + 2\pi R^2$$

sau:

(2) $$S_t = 2\pi R (I + R)$$

Observare. Suprafaţă totală a unui cilindru circular drept, se află înmulţind lungimea cercului de bază, cu suma dintre înălţimea cilindrului şi raza acestui cerc.

III. Volumul unui cilindru circular drept.

Se deduce din:

Volumul prismei = suprafaţa poligonului de bază al prismei $\times$ înălţimea prismei,

astfel:

Volumul cilindrului = suprafaţa cercului de bază al cilindrului $\times$ înălţimea cilindrului,

deci:

(3) $$V = \pi R^2 \times I$$

adică: *volumul unui cilindru se află înmulţind suprafaţa cercului de bază, cu înălţimea.*

Observare. Cum procedăm dacă trebue să învelim suprafaţa laterală a unui vas cilindric de lemn, de înălţime I şi rază R, cu o tablă, astfel ca marginile ei să se atingă fără să se petreacă?

Luăm un fir de aţă, lung cât cercul de bază al cilindrului, ceeace se obţine aşezând firul dealungul marginei acestui cerc (fig. 141).

Tăiem apoi dintr'o foaie de tablă, o bucată în formă de dreptunghiu, cu înălţimea AB = I (înălţimea cilindrului) şi cu baza AD egală cu lungimea firului de aţă (AD = 2 π R).

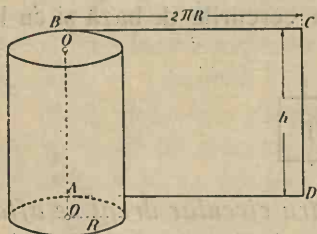


Fig. 141.

Dacă fixăm cu cuie marginea AB a tablei, dealungul unei generatoare a cilindrului şi o înfăşurăm apoi pe cilindru, constatăm că ea acoperă *exact* suprafaţa laterală a acestuia, cealaltă latură CD a tablei coincizând cu latura AB.

Explicaţia acestei potriviri vine din faptul că putem dintr'o tablă în formă de dreptunghiu să facem un sul în formă de cilindru şi pentru că în cazul de mai sus, am luat baza AD exact egală cu lungimea cercului de bază al cilindrului, iar înălţimea lui egală cu înălţimea cilindrului.

Operaţia de mai sus, se numeşte *înfăşurarea* (sau *învelirea*) unei suprafeţe plane (suprafaţa dreptunghiului ABCD) pe un cilindru.

Această operaţie o facem ori de câte ori învelim un vas în formă de cilindru cu o hârtie, pânză, tablă etc.; sau când dintr'o tablă plană în formă de dreptunghiu facem un burlan în formă de cilindru, etc.

Reciproc: dacă un corp, în formă de cilindru, este învelit cu o hârtie, pânză etc. şi tăiem această hârtie dealungul unei generatoare AB şi *deslipim* hârtia depe cilindru, constatăm că o putem

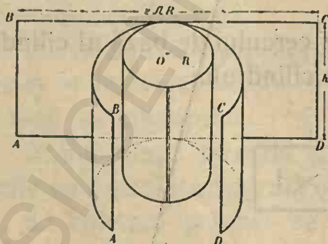


Fig. 142.

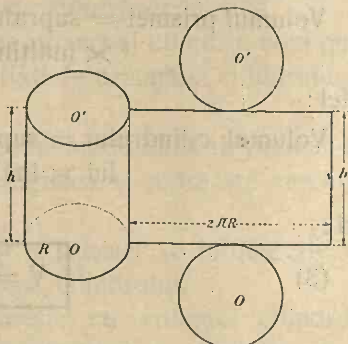


Fig. 142_1.

aşterne pe o suprafaţă plană şi obţinem un dreptunghiu ABCD, a cărui bază AD = 2 π R (lungimea cercului de bază), iar înălţimea AB = I (înălţimea cilindrului) (fig. 142).

Suprafaţa acestui dreptunghiu este evident egală cu suprafaţa laterală a cilidrului.

Operaţia de mai sus este inversă *înfăşurării;* ea se numeşte *desfăşurarea cilindrului pe un plan.*

Din exemplele de mai sus reiese că hârtia, pânza, tabla etc., — în formă de dreptunghiu — pot înveli complet suprafaţa laterală a unui cilindru, în condiţiile descrise mai sus.

Deaceea suprafaţa laterală a unui cilindru se mai poate numi şi *mantaua* cilindrului.

In fig. 142_1 s'a reprezentat şi mantaua şi bazele cilindrului.

Observare importantă. Referindu-ne la observarea dela pag. 167, prismă, omogeneit şi la cele ce o preced, observăm că suprafaţa laterală a cilindrului:

$$S_l = 2\pi R \times l$$

se află înmulţind două lungimi R şi l, iar rezultatul se înmulţeşte cu numărul abstract 2π[1]).

Ea se va exprima deci în m^2, dm^2, cm^2, etc.

Tot astfel suprafaţa totală:

$$S_t = 2\pi R.\, l + 2\pi R^2$$

este o sumă de doi termeni, $2\pi R.\, l$ şi $2\pi R^2$, *de acelaş fel*, deoarece $2\pi R.\, l$ este o suprafaţă, iar $2\pi R^2 = 2\pi R \times R$, reprezintă tot o suprafaţă, în m^2, dm^2, cm^2.

Volumul cilindrului;

$$V = \pi R^2.\, l$$

se află înmulţind o suprafaţă (πR^2) cu o lungime (l) şi cum această suprafaţă rezultă din înmulţirea două lungimi: $R \times R$, cu numărul abstract π, înseamnă că volumul cilindrului este produsul a trei lungimi: $R \times R \times l$, prin numărul abstract π, *cum şi trebuia*, adică se exprimă în m^3, dm^3, cm^3, etc.

Exerciţiu. Formula:

$$S_{laterală} = 2\pi R.\, l + 2\pi R$$

este exactă?

R; Nu, deoarece în membrul I fiind o suprafaţă, în membrul al II-lea trebuie să fie tot o suprafaţă.

Intr'adevăr, observăm că termenul $2\pi R.\, l$ este o suprafaţă,

1) Numărul π este raportul dintre lungimea unui cerc şi diametrul lui, deci este un număr abstract.

fiind un produs de două lungimi R şi I, prin numărul abstract 2π; însă $2\pi R$ este o lungime; o suprafaţă nu poate fi deci egală cu suma dintre o suprafaţă şi o lungime.

Se recomandă ca oridecâteori se scrie o formulă, care reprezintă lungimi, suprafeţe sau volume, să se facă asemenea verificări, spre a evita erorile.

Aplicaţii. 1. Un cilindru circular drept are raza bazei $R = 1{,}25$ m. şi înălţimea $h = 4{,}34$ m.

Se cere să se calculeze suprafaţa laterală, totală şi volumul.

R: $S_l = 2\pi R.\,h = 2\pi \times 1{,}25\text{ m} \times 4{,}34\text{ m} = 34{,}0690\text{ m}^2$

$$S_t = 2\pi R.\,h + 2\pi R^2 = 34{,}0690 + 2\pi(1{,}25)^2$$
$$= 43{,}8815\text{ m}^2$$

$$V = \pi R^2 h = \pi \times (1{,}25)^2 \times 4{,}34\text{ m} = 21{,}293\text{ m}^3$$

2. Suprafaţa laterală (mantaua) unui cilindru circular drept, cu înălţimea $h = 5{,}98$ m, fiind de $360{,}24\text{ m}^2$, se cere să se afle volumul cilindrului.

R: Avem: $2\pi R.\,5{,}98\text{ m} = 360{,}24\text{ m}^2$

$$\text{deci}: R = \frac{360{,}24\text{ m}^2}{2\pi \times 5{,}98\text{ m}} = 9{,}59\text{ m}$$

$$\text{apoi}: V = \pi R^2 h = \pi(9{,}59)^2\, 5{,}98\text{ m} = 1727{,}798\text{ m}^3$$

3. Raza unui cilindru circular drept este $R = 3{,}8$ dm., iar volumul său $V = 105\text{ dm}^3$. Să se afle suprafaţa laterală şi totală a cilindrului.

R: Avem: $\pi(3{,}8)^2 h = 105\text{ dm}^3$

$$h = 2{,}3\text{ dm}$$

$$S_l = 2\pi \times 3{,}8 \times 2{,}3 = 54{,}8872\text{ dm}^2$$

$$S_t = 54{,}8872 + 2\pi(3{,}8)^2 = 145{,}5704\text{ dm}^2$$

REZUMAT.

CAP. VIII. CILINDRUL.

* Corpul geometric care ia naştere prin rotirea unui dreptunghiu în jurul uneia din laturile sale, se numeşte *cilindru circular drept.*

El este mărginit de *o suprafață cilindrică* şi de două *cercuri de bază.*

* Diferitele poziţiuni pe care le ocupă în spaţiu, latura dreptunghiului, care prin rotaţie dă naştere cilindrului, se numesc *generatoarele* cilindrului.

* Distanţa între planele cercurilor de bază, este înălţimea cilindrului.

* Un cilindru circular drept poate fi privit ca o prismă regulată cu un număr foarte mare de feţe, fiecare faţă fiind foarte mică.

* Suprafaţa laterală S_e a unui cilindru se mai numeşte şi *mantaua* cilindrului:

$$S_l = 2\pi R \times I$$

R fiind raza cercului de bază şi I înălţimea cilindrului.

* Suprafaţa totală S_t a cilindrului:

$$S_t = 2\pi R (I + R)$$

* Volumul V al unui cilindru circular drept:

$$V = \pi R^2 \times I$$

EXERCIŢII.

1. *Un rezervor în formă de cilindru circular drept are diametrul bazei* $D = 3{,}70$ *m, iar înălţimea* I *egală, cu acest diametru. Care este capacitatea acestui rezervor ?*

$$R: V = \frac{\pi D^2}{4} \cdot I = \frac{\pi (3{,}70)^2}{4} 3{,}70 = 39{,}762605 \text{ m}^3 \quad C = 39762{,}605 \text{ l}$$

2. *Care este suprafaţa de tablă necesară spre a înveli lateral un vas în formă de cilindru circular drept, a cărui rază este* $R = 4{,}20$ *m, iar înălţimea* $I = 3{,}15$ *m ?*
(Se va presupune că foile de tablă nu se petrec unele peste altele).

$$R: S = 2\pi \times R \times I = 2\pi \times 4{,}20 \text{ m} \times 3{,}15 \text{ m} = 83{,}0344 \text{ m}^2$$

3. *Se cunoaşte suprafaţa laterală a unui cilindru circular drept:* $S_l = 438{,}24$ *dm² şi înălţimea sa* $I = 44{,}8$ *dm ; se cere raza* R *a cilindrului.*

$$R: \text{Avem}: R = \frac{438{,}24 \text{ dm}^2}{44{,}8 \times 2\pi} = 1{,}557 \text{ dm}$$

4. *Volumul unui cilindru circular drept este* $V = 237$ *dm³, iar înălţimea sa* $I = 2{,}42$ *m ; care este suprafaţa laterală şi totală a cilindrului?*

$$R: \text{Raza cilindrului}: R^2 = \frac{V}{\pi \cdot I} = \frac{237 \text{ dm}^3}{\pi \times 24{,}2 \text{ dm}} = 3{,}1189 \text{ dm}^2$$

$$R = 1{,}76 \text{ deci } S_l = 2\pi R \cdot I = 26{,}747776 \text{ dm}^2, \text{ iar}$$
$$S_t = 2\pi R \cdot I + 2\pi R^2 = 46{,}334468 \text{ dm}^2$$

5. *Se dă suprafaţa totală* $S_t = 184{,}3424$ *m², a unui cilindru circular drept şi raza lui* $R = 4{,}5$ *m.*
Se cere să se afle suprafaţa laterală şi volumul.

$$R: \text{Avem}: S_t = 184{,}3424 \text{ m}^2 = S_l + 2\pi \cdot (4{,}5)^2$$
$$\text{deci}: S_l = 184{,}3424 - 2\pi R^2 = 57{,}1724 \text{ m}^2$$
$$I = \frac{57{,}1724}{2\pi R} = 2{,}02 \text{ m}$$
$$V = 128{,}441700 \text{ m}^3$$

6. *Se cunoaşte suprafaţa laterală* $S_l = 45\ cm^2$ *şi suprafaţa totală* $S_t = 74\ cm^2$ *a unui cilindru circular drept.*

Se cere să se afle raza R, *înălţimea* I *şi volumul cilindrului.*

R: Avem: $S_t - S_l = 74\ cm^2 - 45\ cm^2 = 2\pi R^2$;

$$R^2 = \frac{29}{2 \cdot \pi} = 4{,}6178\ cm^2$$

$$R = 2{,}14\ cm.$$

apoi: $$I = \frac{S_l}{2\pi R} = \frac{45}{2\pi 2{,}14} = 3{,}34\ cm$$

Volumul $$V = \pi R^2 . I = 48{,}429639\ cm^3$$

7. *Raza* R *a unui cilindru este de 15,3 dm, iar înălţimea sa* $I = 48{,}4\ dm$; *se cere să se afle suprafaţa laterală, totală şi volumul cilindrului.*

R: $S_l = 2\pi R . I = 4650{,}4656\ dm^2$
$S_t = 2\pi R . I + 2\pi R^2 = 6120{,}5508\ dm^2$
$V = \pi R^2 . I = 35576{,}061840\ dm^3$

8. *Volumul unui cilindru circular drept este* $V = 524{,}342\ dm^3$ *şi raza* $R = 14\ dm$; *să se afle înălţimea* I, *suprafaţa laterală şi totală.*

R: $I = \frac{V}{\pi R^2} = \frac{524{,}342}{\pi (14)^2} = 0{,}85\ dm$
$S_l = 2\pi R . I = 74{,}7330\ dm^2$
$S_t = 2\pi R . I + 2\pi R^2 = 1305{,}6120\ dm^2$

9. *Un dreptunghiu de hârtie are laturile* a *şi* b; *se înfăşoară această hârtie în formă de cilindru, astfel ca:*

1. *Înălţimea lui să fie* a.
2. *Înălţimea lui să fie* b.

Să se afle suprafeţele laterale, totale şi volumele celor două cilindre circulare drepte, astfel obţinute.

R: 1. $S_l = a . b$; $S_t = a . b + \frac{b^2}{2\pi}$; $V = \frac{a^2}{4\pi} . b$

2. $S_l = b . a$; $S_t = b . a + \frac{a^2}{2\pi}$; $V = \frac{b^2}{4\pi} . a$

Suprafeţele laterale (adică mantalele celor doi cilindri) sunt egale, cum era şi de aşteptat, deoarece ele se obţin din înfăşurarea aceluiaş dreptunghiu de arie *ab*.

10. *Să se calculeze raportul volumelor celor doi cilindri din exerciţiul precedent.*

R: $$V = \frac{\frac{a^2 b}{4\pi}}{\frac{b^2 a}{4\pi}} = \frac{a}{b}$$

CAP. IX.

C O N U L.

Exemple. 1. Să tăiem o bucată de lemn sau de carton în formă de cerc O şi să înfigem, perpendicular pe el şi în centrul lui, o undrea OS; să tăiem apoi din sârmă, bucăţi egale între ele, care să se sprijine cu un capăt în S şi cu celălalt capăt pe cerc, în A, B, C,..... (fig. 143).

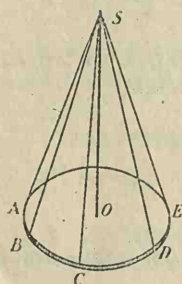


Fig. 143.

Observăm că cu cât vergelele SA, SB, SC,...., sunt mai numeroase şi mai dese, cu atât mai mult, *toate la un loc*, dau naştere la o suprafaţă, care *seamănă* cu aceea care mărgineşte vârful clădirii din fig. 210.

De altfel aşa se procedează când se construieşte vârful acelei clădiri; cercul O este suprafaţa podului, iar barele SO, SA, SB, SC,....., se fac din lemn.

Corpul geometric astfel obţinut se numeşte *con circular drept;* cercul O este *baza* conului. iar raza acestui cerc este *raza* conului; punctul din vârf, S, este *vârful* conului.

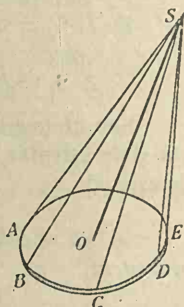


Fig. 144.

Vergelele SA, SB, SC....., *sunt generatoarele* conului, iar suprafaţa curbă, pe care ele o formează, este *suprafaţa laterală* a conului (sau mantaua conului). Această suprafaţă se chiamă şi *suprafaţă conică.*

Segmentul de dreaptă, care porneşte din vârful S perpendicular pe bază, este *înălţimea* (sau *axa* conului).

Observare. Dacă undreaua SO am înfige-o tot în centrul O al cercului, dar *oblic*, am constata că vergelele SA, SB, SC, (Fig. 144), care trebuie să unească vârful S cu punctele cercului de bază, nu mai sunt egale.

Corpul geometric astfel obţinut se numeşte *con circular oblic.*

Înălţimea acestui con este prin definiţie, distanţa SS′ dela vârful S la planul P al bazei.

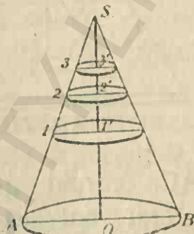


Fig. 145.

2. Ca şi la cilindru (pag. 92), putem obţine un con circular drept, servindu-ne numai de cercuri. În acest scop, să tăiem din carton, *după voie*, un cerc O, care să fie baza conului şi să înfigem în centrul lui o undrea SO, care va fi înălţimea sau axa conului circular drept. (fig. 145).

Cu ajutorul a trei vergele SA, SB, AB, dintre care SA, SB, pornesc din vârful S şi ajung la capetele A şi B ale diametrului AB al cercului de bază, construim deoparte un triunghiu isoscel SAB.

Să tăiem apoi din carton cercuri cu raze egale respectiv cu lungimele 1 1′, 2 2′, 3 3′,. . . . . duse *paralel* la diametrul AB şi mărginite la vergelele SA şi SB. Dacă aşezăm aceste cercuri dealungul undrelei SO, astfel ca centrele lor 1′, 2′, 3′,. . . . . să fie pe undreaua SO şi planele lor să se aştearnă unele peste altele, *marginile* acestor cercuri formează o suprafaţă care *seamănă* cu a unui con circular drept.

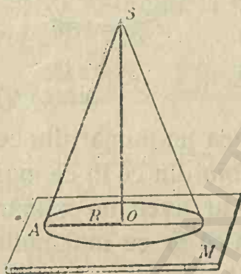


Fig. 146.

Centrele 1′, 2′, 3′, ..., ale acestor cercuri se găsesc pe undreaua SO, care este *axa* conului circular drept.

3. Să formăm din sârmă un triunghiu dreptunghiu SOA, şi să înfigem vârful din O al sârmei SO perpendicular pe o masă plană. (Fig. 147).

Dacă rotim triunghiul în jurul catetei SO, observăm că vârful A descrie pe masă un cerc cu centrul în O şi raza R = OA.

Ipotenusa SA a triunghiului, descrie o *suprafaţă conică.*

Corpul geometric, (fig. 146) care este mărginit de o suprafaţă conică şi de un cerc de bază se numeşte con de revoluţiune sau con circular drept ; vârful său este în S, iar proecţiunea sa pe planul bazei este centrul O a! cercului de bază.

Dreapta SA este generatoarea conului, şi deoarece ea poate ocupa în spaţiu — în timpul rotaţiei — oricât de mult poziţiuni, rezultă că un con circular drept are oricât de multe generatoare, toate trecând prin vârful S al conului şi sprijinindu-se pe marginea cercului de bază.

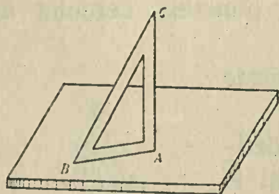


Fig. 147.

Observare. Dacă aşezăm pe o masă plană un echer ABC, astfel ca latura AC să fie perpendiculară pe masă (fig. 147) şi apoi îl *rotim* în jurul catetei AC, corpul geometric astfel obţinut este, după cum s'a arătat mai sus, un con cu vârful în C, cu generatoarea egală cu ipotenuza CB, iar cercul de bază are centrul în A şi raza R = AB. Deci:

Conul circular drept poate lua naştere prin rotirea unui triunghiu dreptunghiu în jurul uneia din catete

Observare. Să înscrim într'un cerc O de rază R, un poligon regulat ABCDEF şi să unim vârfurile lui cu punctul S, situat pe perpendiculara ridicată pe planul cercului, în centrul lui O (Fig. 148).

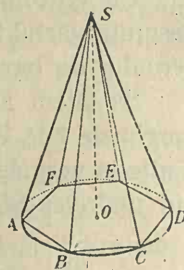


Fig. 148.

Obţinem o piramidă regulată cu vârful în S şi având ca bază poligonul regulat ABCDEF; se zice că această piramidă este *înscrisă* în conul circular drept, care are ca vârf pe S şi ca bază cercul O.

Dacă poligonul de bază al piramidei ar avea un număr din ce în ce mai mare de laturi, acest poligon ar *semăna* din ce în ce mai mult cu cercul O; pe de altă parte, piramida ar avea un număr foarte mare de feţe laterale şi va *semăna* din ce în ce mai mult cu conul circular drept.

Rezultă de aci că:

Un con circular drept poate fi privit ca o piramidă regulată, care are un număr foarte mare de feţe laterale, fiecare faţă fiind foarte mică.

Exemplu. Dacă ascuţim bine un creion, vârful său este o piramidă regulată cu un număr mare de feţe; dacă ne servim de o maşină de ascuţit, feţele acestei piramide devin atât de multe şi de mici, încât partea ascuţită a creionului ne apare ca un con circular drept.

Observare. Tot astfel şi un con circular oblic poate fi privit ca provenind dintr'o piramidă oblică, care are ca bază un poligon regulat cu un număr foarte mare de laturi.

Putem conchide că:

Atât conul circular drept cât şi conul circular oblic pot proveni dintr'o piramidă regulată dreaptă sau oblică, cu un număr foarte mare de feţe laterale, fiecare din feţe fiind foarte mică.

Din cauza acestei înrudiri dintre piramidă şi con, putem (ca şi la prismă şi cilindru) să aplicăm rezultatele aflate la piramidă, conului, cu următoarele schimbări:

1. Perimetrul şi suprafaţa poligonului de bază al piramidei înscrise, se înlocuiesc respectiv cu lungimea şi suprafaţa cercului de bază al conului.

2. Suprafaţa laterală şi totală a piramidei se înlocuieşte respectiv cu suprafaţa laterală a conului (a mantalei conului) şi cu suprafaţa totală a conului (suprafaţa mantalei, la care se adăogă suprafaţa cercului de bază); observând totdeodată că apotema piramidei, adică înălţimea uneia din feţele ei laterale, devine generatoare pentru con.

3. Volumul piramidei se înlocuieşte cu volumul conului;

I. Suprafaţa laterală a unui con circular drept.

S'a stabilit la pag. 82 că suprafaţa laterală a unei piramide regulate este:

$$\text{(piramidă) } S_l = \frac{\text{perimetrul poligonului de bază} \times \text{apotema piramidei}}{2}$$

In cazul unui con, care este o piramidă cu un număr foarte mare de feţe:

$$\text{(con) } S_l = \frac{\text{lungimea cercului de bază} \times \text{generatoarea conului}}{2}$$

sau: fie R raza bazei şi G generatoarea conului, avem:

$$\text{(I)} \quad \boxed{S_l = \frac{2\pi R \times G}{2}} \quad \text{sau mai simplu:} \quad \boxed{S_l = \pi R . G.}$$

adică:

Suprafaţa laterală a unui con circular drept se află înmulţind lungimea cercului de bază cu generatoarea şi împărţind produsul cu 2.

II. Suprafaţa totală a unui con circular drept se află adăogând la suprafaţa sa laterală suprafaţa bazei, adică:

$$S_t = \pi R . G + \pi R^2$$

sau scoţând pe R în factor comun:

(II) $$S_t = \pi R(G + R)$$

Observare. *Suprafaţa totală a unui con circular drept se află înmulţind pe π cu raza cercului de bază şi cu suma dintre această rază şi generatoare.*

III. Volumul unui con circular drept.

S'a arătat (pag. 83) că la o piramidă regulată:

$$\left(\text{piramidă regulată}\right) \quad V = \frac{\text{suprafaţa poligonului de bază} \times \text{înălţimea}}{3}$$

deci la un con:

$$(\text{con}) \quad V = \frac{\text{suprafaţa cercului de bază} \times \text{înălţimea}}{3}$$

sau:

(III) $$V = \frac{\pi R^2 \times h}{3}$$

Volumul unui con circular drept se află înmulţind suprafaţa bazei cu înălţimea şi împărţind produsul cu 3.

Observare. Rezultă de aci şi din formula (III) (pag. 95), că un con are ca volum a treia parte din volumul unui cilindru, care are aceeaşi bază şi aceeaşi înălţime.

TRUNCHIU DE CON.

Trunchiu de con este corpul ce se obţine tăind un con cu un plan paralel cu baza şi înlăturând conul cel mic. (fig. 149).

Intersecţia suprafeţei conului cu planul de secţiune este un cerc.

Cercul de bază O al conului şi cercul de secţiune O' sunt *bazele* trunchiului de con.

Distanţa între planele celor două baze este *înălţimea* trun-

chiului de con; porţiunile ca $AA' = BB'$ din generatoarele conului, cuprinse între cele două baze, sunt *generatoarele* trunchiului de con.

Trunchiul de con obţinut dintr'un con circular drept se cheamă *trunchiu de con circular drept.*

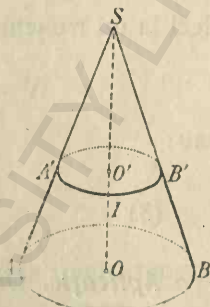


Fig. 149.

Observare. Trunchiul de con poate fi privit ca rezultând dintr'un trunchiu de piramidă, ale cărei baze sunt poligoane regulate cu un număr foarte mare de laturi.

Feţele trunchiului de piramidă sunt în acest caz *foarte mici* şi toate la un loc dau *impresiunea* unei suprafeţe curbe.

Exemplu. Trunchiul de piramidă, ce serveşte ca greutate pentru cântare (vezi fig. 194), seamănă cu un trunchiu de con, cu atât mai mult cu cât numărul laturilor poligoanelor de bază este mai mare.

Suprafaţa laterală, totală şi volumul unui trunchiu de con, se pot obţine în baza observaţiei de mai sus, din suprafaţa laterală, totală şi volumul unui trunchiu de piramidă.

Perimetrele şi ariile celor două poligoane de bază ale trunchiului de piramidă, se înlocuiesc respectiv cu lungimile şi ariile cercurilor de bază ale trunchiului de con; *apotema* trunchiului de piramidă devine *generatoarea* trunchiului de con.

Să însemnăm cu: R şi r, razele celor două cercuri de bază, I înălţimea şi G generatoarea trunchiului de con. Avem:

1. Suprafaţa laterală (S_l.) La un trunchiu de piramidă, (vezi pag. 84):

$$S_l = \frac{P + P'}{2} \times a$$

deci la un trunchiu de con;

$$S_l = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2} \times G$$

adică:

$$(1) \qquad \boxed{S_l \; tr.\, con = \pi (R + r) G}$$

2. Suprafaţa totală (S_t.) La suprafaţa laterală S_l, adăogăm suprafeţele celor două baze:

$$(2) \qquad \boxed{S_t \,(tr.\,con) = \pi (R + r) G + \pi (R^2 + r^2)}$$

3. Volumul trunchiului de con (V).
La un trunchiu de piramidă avem:

$$V = \frac{I}{3}(B + b + \sqrt{B \times b})$$

deci la un trunchiu de con:

$$V = \frac{I}{3}(\pi R^2 + \pi r^2 + \sqrt{\pi R^2 . \pi r^2})$$

sau:

$$(3) \qquad \boxed{V = \frac{\pi I}{3}(R^2 + r^2 + R . r)}$$

Aplicație. *Un trunchiu de con circular drept are $R = 8$ dm., $r = 3$ dm., $I = 5$ dm. Să se afle* S_l, S_t, V.

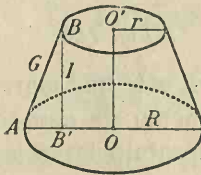


Fig. 150.

R: Observăm din triunghiul dreptunghiu A B B' (fig. 150) că

$$G^2 = I^2 + (R - r)^2$$
$$= 5^2 + (8 - 3)^2 = 50$$
$$G = \sqrt{50} = 7{,}05 \text{ cm.}$$

1. $S_l = \pi (R + r) G = \pi (8 + 3) \times 7{,}05 = 243{,}5070 \text{ cm}^2$

2. $S_t = S_l + \pi (8^2 + 3^2) = 472{,}7270 \text{ cm}^2$

3. $V = \frac{\pi (8^2 + 3^2 + 8 \times 3) 5}{3} = 507{,}633 \text{ cm}^3$

REZUMAT.

CAP. IX. CONUL.

* Corpul geometric care ia naştere prin rotaţia unui triunghiu în jurul uneia din cotele lui, se numeşte *con*.

Conul este mărginit de o *suprafaţă conică* şi de un *cerc de bază*.

* Diferitele poziţiuni pe care le ocupă în spaţiu, în timpul rotaţiei, cateta triunghiului, se numesc *generatoarele* conului.

Distanţa dela vârful conului la baza sa, se cheamă *înălţime*.

* Un con circular drept poate fi privit ca o piramidă regulată care are un număr foarte mare de feţe laterale, fiecare faţă fiind foarte mică.

* Suprafaţa laterală S_l a unui con se mai numeşte şi *mantaua* conului:

$$\boxed{S_l = \pi \cdot R \cdot G}$$

R fiind raza cercului de bază şi G generatoarea.

* Suprafaţa totală S_t:

$$\boxed{S_t = \pi R (G + R)}$$

* Volumul V al conului:

$$V = \frac{\pi R^2 \times h}{3}$$

h fiind înălţimea conului.

EXERCIŢII.

1. *Inălţimea unui con circular drept este* I = *4,5 m, iar raza bazei* r = *2 m; la o distanţă egală cu 1,20 m. de vârf se duce un plan paralel cu baza. Care este aria cercului de secţiune astfel obţinut?*

R: 0,7850 m².

2. *Se dă un con cu raza* R *şi înălţimea* I; *în interiorul lui se formează un al doilea con, cu aceeaşi bază şi cu înălţimea cât trei sferturi din aceea a conului mare. Să se arate că volumul cuprins între aceste două corpuri este echivalent cu al unui al treilea con cu aceeaşi rază* R *şi cu înălţimea* $\frac{I}{4}$.

R: Volumul cuprins are expresiunea: $V = \frac{\pi R^2}{3} \cdot \frac{I}{4}$

3. *Se dă un con circular drept de rază* R *şi înălţime* I. *În interiorul lui se formează un al doilea con cu raza* $\frac{R}{2}$ *şi cu aceeaşi înălţime* I; *să se arate că volumul cuprins între cele două conuri este o pătrime din volumul unui cilindru având aceeaşi rază* R *şi înălţimea* I.

R: Volumul cuprins este egal cu $\frac{\pi R^2 . I}{4}$.

4. *O greutate întrebuinţată la cântărit, are forma unui trunchiu de con; razele bazelor sunt:* R = *4,5 cm şi* r = *2,3 cm. Care este înălţimea trunchiului de con, dacă greutatea este de 2 kg, iar densitatea 7,8.*

R: 6,8 cm.

5. *Dintr'un cerc cu raza de 12 dm, se taie un sector cu unghiul la centru de 60° şi apoi se lipesc razele extreme, alcătuindu-se astfel un con. Să se afle volumul şi capacitatea acestui con.*

R: Lung. arc. = lung. cerc. de bază = $\frac{\pi \times 12 \times 60}{180} = 12,56$ dm; $r = 2$ dm. $I = \sqrt{12^2 - 2^2} = 11,83$ dm. Vol. = 49,528 dm³.

6. *Un triunghiu dreptunghiu cu o catetă de 6 dm, şi cu înălţimea coborîtă din vârful unghiului drept de 4,8 dm, se roteşte împrejurul acestei catete dând astfel naştere unui con.*

Să se afle: 1) Volumul acestui con; 2) Unghiul la centru de n⁰ *al sectorului obţinut tăind suprafaţa laterală a acestui con după o generatoare şi desfăşurând-o apoi pe un plan.*

R: Proiecţia înălţimii pe generatoare este: $\sqrt{6^2 - 4,8^2} = 3,6$ dm.;

Generatoarea: $\frac{6^2}{3,6} = 10$ dm.

Raza de bază: $\sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ dm.

Vol. con. $= \frac{\pi \times 8^2 \times 6}{3} = 401.920$ dm³

$n^0 = \frac{\text{S. lat. con.} \times 360}{\pi \times g^2} = \frac{8 \times 360}{10} = 288^0.$

CAP. X.

SFERA.

Exemple. Să privim o mingie (fig. 151), o bilă de biliard (fig. 152), un bulgăr rotund de zăpadă (fig. 153), globul pământului (fig. 154), care sunt corpuri geometrice mărginite în toate părţile de o suprafaţă curbă.

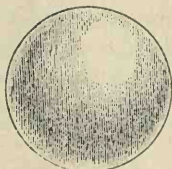


Fig. 151.



Fig. 152.



Fig. 153.



Fig. 154.

Definiţie. Se numeşte *sferă* un corp geometric mărginit de o suprafaţă, ale cărei puncte sunt egal depărtate de un punct din interior, numit *centrul* sferei.

Segmentul de dreaptă OA, care uneşte centrul O al sferei (fig. 155), cu un punct *oarecare* A al suprafeţei ei, se chiamă *raza* sferei. O vom nota cu R.

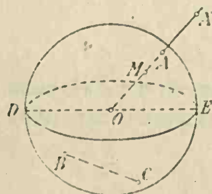


Fig. 155.

Rezultă din definiţia sferei că toate razele sferei sunt *egale* între ele, după cum la un cerc, toate razele lui sunt egale între ele.

Pe desen, o sferă se reprezintă printr'un cerc; se scrie centrul cu o literă, de exemplu O, şi se citeşte: *sfera* O.

Distanţa dela centrul O la un punct M, *interior* sferei este *mai mică decât* raza OA, iar distanţa lui la un punct *exterior* A' este mai mare decât această rază.

Segmentul de dreaptă, care uneşte două puncte ale sferei, se chiamă *coardă*. Spre exemplu coarda BC.

Orice coardă, care trece prin centrul sferei, se chiamă *diametru;* spre exemplu diametrul DE.

Toate diametrele sferei sunt egale între ele, deoarece fiecare diametru este egal cu două raze.

Poziţia unui punct faţă cu o sferă.

Un punct din spaţiu poate să fie:

a) Interior unei sfere, dacă distanţa sa la centrul sferei este *mai mică* decât raza (spre exemplu punctul M; $OM < OA$);

b) Exterior sferei, dacă distanţa sa la centrul sferei este *mai mare* decât raza sferei (spre exemplu punctul N; $ON > OA$);

c) Situat pe sferă, spre exemplu A, deoarece $OA = R$.

Dacă tăiem o sferă cu un plan, care trece prin centrul O al sferei, punctele lui de intersecţie cu suprafaţa sferei, fiind pe sferă, sunt egal depărtate de centrul sferei şi fiind şi în acelaş plan sunt situate pe un cerc.

Deaceea se poate spune că *secţiunea* suprafeţei unei sfere cu un plan, care trece prin centrul sferei, este un cerc: spre exemplu cercul O, de diametru DE (fig. 155).

Generarea suprafeţei unei sfere. Să luăm o sârmă în formă de cerc cu centrul în O şi să o învârtim de 180^0, în jurul unuia din diametrii cercului, spre exemplu AB (fig. 156).

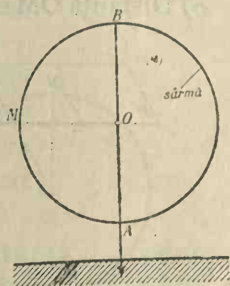


Fig. 156.

Acest cerc dă naştere, prin învârtire, unei suprafeţe, care este suprafaţa unei sfere, deoarece în tot timpul rotaţiei, toate punctele cercului rămân la aceeaşi depărtare de centrul O. Rezultă de aci că:

Sfera este un corp geometric, a cărui suprafaţă poate lua naştere prin rotirea de 180^0 a unui cerc în jurul unuia din diametrii lui.

Observare. Acelaş rezultat se obţine dacă am roti de 360^0 un semicerc AMB (fig. 156), în jurul diametrului AB.

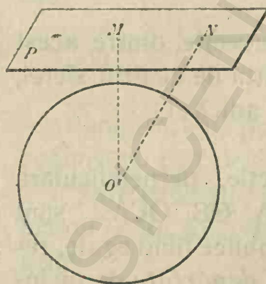


Fig. 157. a.

Poziţia unui plan faţă de o sferă.

Fie sfera O şi un plan P; să coborîm din centrul O, perpendiculara OM pe acest plan. Se pot întâmpla următoarele trei cazuri:

a) Distanţa OM, dela centrul O la plan este mai mare decât raza R a sferei (fig. 157*a*); punctul M este deci exterior sferei.

Tot astfel, *oricare* alt punct N al planului P, este exterior sferei deoarece ON este o oblică față de plan și deci ON > OM > R.

Toate punctele planului P fiind *exterioare* sferei, se zice că *planul este exterior sferei.*

Exemplu. Planul mesei, față de globul pământesc așezat pe un picior (fig. 154).

b) Distanța OM este egală cu raza R a sferei (fig. 157 *b*); în acest caz, punctul M se găsește pe suprafața sferei, dar *oricare* alt punct N din acel plan, este *exterior* sferei, deoarece ON este o oblică, deci este mai lungă decât perpendiculara OM = R.

Planul P *atinge* în acest caz suprafața sferei într'un singur punct M.

Se zice că *planul este tangent sferei.*

Exemplu. O bilă de biliard este o sferă, iar planul biliardului este *tangent suprafeței* ei.

c) Distanța OM este *mai mică* decât raza R a sferei (fig. 157 *c*).

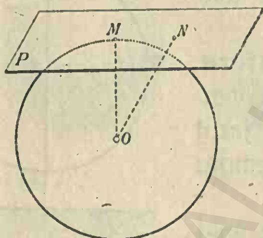


Fig. 157 b.

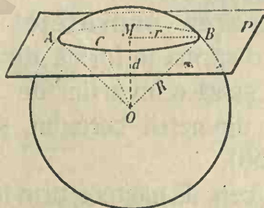


Fig. 157 c.

In acest caz, să observăm că planul *taie* sfera, adică este *secant* la sferă.

Punctele A, B, C, ..., ale curbei de intersecție, dintre acest plan și suprafața sferei au aceeași distanță față de centrul sferei, deoarece ele sunt puncte situate pe sferă, adică:

$$OA = OB = OC = \ldots\ldots.$$

Să observăm că OM este, prin construcție, perpendiculara dusă din O pe planul P, iar segmentele OA, OB, OC,... sunt oblice duse din acelaș punct pe plan; aceste oblice fiind egale, rezultă că picioarele lor A, B, C, ... sunt *egal depărtate* de piciorul M al perpendicularei (vezi pag. 41).

Prin urmare, punctele A, B, C, ... se găsesc pe un cerc cu centrul în M, adică *intersecția suprafeței sferei cu planul este un cerc.*

Exemplu. Dacă tăiem o portocală (perfect rotundă) cu un cuţit, a cărui suprafaţă este *plană*, obţinem ca intersecţie un cerc (fig. 158).

Observare. Dacă tăiem o sferă cu un plan P, care trece prin centrul ei O, obţinem un cerc; să ridicăm pe acest plan, perpendiculara OA şi să mişcăm planul P, astfel ca să rămână tot timpul perpendicular pe OA (adică planul să rămână paralel cu el); observăm că dacă planul se depărtează de centrul O al sferei, distanţa OM dela centru la plan *creşte*, iar raza *r* a cercului de secţiune se micşorează (fig. 159). Când planul este *tangent* la sferă, raza *r* este zero. Dacă planul se depărtează şi mai mult, el devine *exterior* sferei.



Fig. 158.

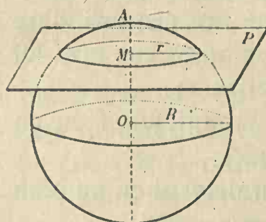


Fig. 159.

Se mai poate deci spune că planul tangent taie sfera după un cerc atât de mic, încât este redus la un punct (cerc de rază egală cu zero).

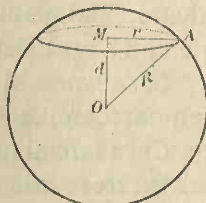


Fig. 160.

Relaţiune între raza R, a sferei, distanţa d, a centrului ei la planul de secţiune şi raza *r* a cercului de secţiune. Din triunghiul dreptunghiu OMA, rezultă (fig. 160):

$$\overline{OA}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{OA}^2$$

sau:

$$(1) \qquad \boxed{R^2 = d^2 + r^2}$$

relaţiune, care ne permite să aflăm una din lungimile R, *d*, *r*, când cunoaştem pe celelalte două.

Spre exemplu, dacă se dă raza R a sferei şi distanţa *d*, de planul O de secţiune, putem calcula raza *r* a cercului de secţiune astfel:

$$r^2 = R^2 - d^2$$

sau:

$$\boxed{r = \sqrt{R^2 - d^2}}$$

Exemplu. Se dă R = 10 dm, d = 8 dm, se cere r; avem:

$$r = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6 \text{ dm}.$$

Observare. Dacă planul P trece prin centrul O al sferei, OM = d = 0, deci:

$$r = \sqrt{R^2 - 0^2} = R$$

adică: *raza cercului de secţiune este egală cu raza sferei.*

Dacă d < R, *raza cercului de secţiune* ($r = \sqrt{R^2 - d^2}$) *este mai mică decât raza sferei.*

Dacă d = R, *raza cercului de secţiune* ($r = \sqrt{R^2 - R^2} = 0$) *este egală cu zero,* adică planul de secţiune este tangent sferei.

Se vede de aci că raza cercului de secţiune are cea mai mare valoare când planul trece prin centrul sferei; în acest caz raza lui este chiar raza sferei; din această cauză, se defineşte:

Cerc mare al unei sfere este intersecţia suprafeţei ei cu un plan oarecare, ce trece prin centrul sferei (r = R).

Cerc mic al unei sfere este intersecţia suprafeţei ei cu un plan care nu trece prin centrul sferei, *dar taie sfera* (r < R).

Cel mai mic dintre cercurile mici, este acela ce se reduce la un punct (r = 0), când planul de secţiune este *tangent* la sferă.

Exemplu. Să considerăm globul pământesc, *presupus* în formă de sferă.

Planul ecuatorului EE′ trece prin centrul sferei pământeşti şi o taie după un cerc numit *ecuator* (fig. 169). Ecuatorul este deci un cerc mare al sferei pământeşti.

Orice alt plan paralel cu ecuatorul şi care taie sfera pământului, dă ca intersecţie un cerc mic numit *paralel* pământesc; cu cât ne apropiem de unul din cei doi poli P şi P′, cercurile de secţiune se micşorează; în vecinătatea polilor, paralelii sunt cercuri cu raze din ce în ce mai mici; planele duse prin polii P sau P′, paralel cu planul ecuatorului, sunt tangente la sfera pământului. Tot cercuri mari obţinem, tăind globul pământesc cu plane care trec prin axa polilor PP′; aceste cercuri se numesc *meridiane.*



Fig. 161.

Aplicaţie. *Se introduce o bilă în formă de sferă cu raza R = 4 cm, într'un inel în formă de cerc cu raza* r = 2,5 cm *(fig. 161). Care este distanţa* d, *dela centrul* O *al sferei la planul inelului?*

R: Inelul este pentru sfera de mai sus un cerc mic; din triunghiul dreptunghiu OO'A rezultă:

$$d^2 = \overline{OO'}^2 = R^2 - r^2 = 4^2 - 2{,}5^2 = 9{,}75$$

$$d = \sqrt{9{,}75} = 3{,}1 \text{ cm.}$$

Zonă sferică. — Calotă sferică. Să tăiem o sferă de centru O şi rază R prin două plane paralele; porţiunea *din suprafaţa sferei* cuprinsă între cele două cercuri de secţiune se cheamă *zonă sferică* (fig. 162); cercurile de secţiune, se numesc şi *bazele zonei*, iar distanţa AB = I, dintre centrele cercurilor de bază, *înălţimea zonei*.

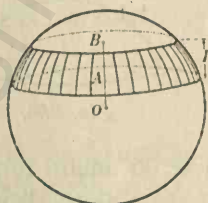


Fig. 162.

Exemple. 1. Când tăiem o portocală în felii, *prin plane paralele*, suprafaţa coajei fiecărei felii este o zonă sferică.

2. Dacă tăiem sfera pământească, ducând plane paralele cu planul ecuatorului, suprafaţa pământului s'a împărţit în zone. Astfel, se ştie din Geografie că există zonă ecuatorială, temperată, etc.

Dacă tăiem o sferă printr'un plan oarecare, ce nu trece prin centrul ei, suprafaţa sferei se desparte în două părţi, una mai mică, alta mai mare, numite *calote sferice;* când planul de secţiune trece prin centrul sferei, cele două calote sunt egale şi se numesc *emisfere.*

Cercul de secţiune se cheamă *baza calotei.*

Să observăm că dacă (fig. 162), planul de secţiune A este fix, iar planul de secţiune B se depărtează, rămânând paralel cu el, până devine tangent la sferă, zona sferică devine o calotă sferică.



Fig. 163.

In tot timpul, dreapta AB este perpendiculară pe bazele zonei, deci şi pe baza calotei.

Se poate spune deci, că o calotă sferică este un caz particular de zonă sferică, în care unul din cercurile de bază s'a redus la un punct, care se cheamă şi *vârful calotei.*

In (fig. 163), vârful calotei mici este în P, iar vârful calotei mari în P'; diametrul PP' este perpendicular pe baza calotei.

Distanţa AP este *înălţimea* calotei mici, iar distanţa AP' este *înălţimea* calotei mari.

Reiese de aci că fiind dată o calotă sferică (fig. 164), *înălţimea* ei este porţiunea din perpendiculara ridicată pe baza calotei, în centrul ei A, până întâlneşte sfera în P.

Exemple. 1. Dacă tăiem o portocală în formă de sferă, printr'un plan oarecare, suprafaţa ei se desparte în două calote; (fig. 165), o calotă mai mică cu centrul A şi înălţimea AP şi o calotă mai mare cu centrul A′ şi înălţimea AP′.

2. Acoperişului, care înveleşte o parte cilindrică a unei clădiri,

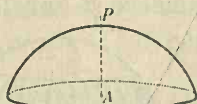


Fig. 164.

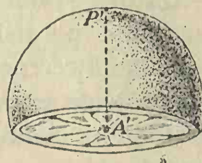




Fig. 165.

i se dă uneori forma unei calote sferice, mai des a unei emisfere. Aceste acoperişuri se numesc cupole.

In (fig. 166) se arată cupola observatorului astronomic din Bucureşti (Parcul Carol).

Pol. Fie pe o sferă de centru O, un cerc mic de centru A; să ducem diametrul PP′ perpendicular pe planul cercului, în centrul lui A (fig. 167). Extremităţile P şi P′ ale acestui diametru se cheamă *polii* cercului A.

Reiese de aci că orice cerc de pe o sferă are doi poli.

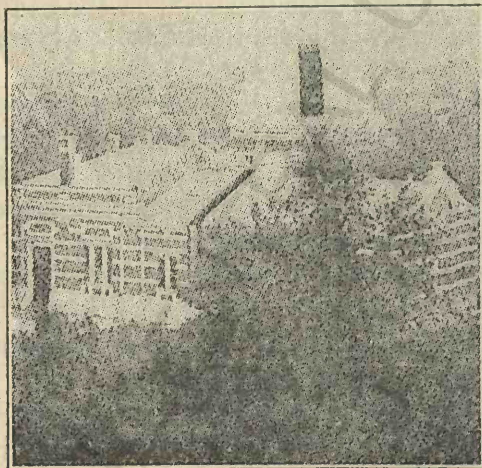
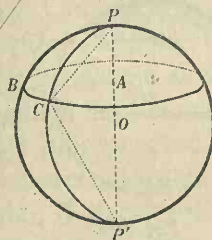


Fig. 166.



Fig, 167.

Observare. Polii cercului A sunt de fapt *vârfurile* celor două calote sferice, în care cercul A desparte suprafaţa sferei.

Când cercul A este un cerc mare (adică punctul A coincide cu centrul O al sferei) polii P şi P′ sunt la egală depărtare de centrul A.

Proprietatea polilor unui cerc. Rază Polară. Fiecare dintre polii unui cerc sunt egali depărtaţi de toate punctele cercului, adică:

$$PB = PC = \ldots \text{ şi } P'B = P'C = \ldots,$$

deoarece picioarele B, C, . . . ale acestor oblice pe planul cercului sunt egal depărtate de piciorul A al perpendicularei, PP′ pe acest plan (vezi pag. 114).

Să ducem prin diametrul PP′, plane *oarecari*, ce taie sfera după cercuri mari, PBP′, PCP′, etc.

Arcele de cerc PB, PC, . . ., subîntind în cercurile *egale*, PBP′, PCP′,. . . . . coarde egale; ele sunt deci egale, adică:

$$\text{arc } PB = \text{arc } PC = \ldots.$$

Tot astfel:

$$\text{arc } P'B' = \text{arc } P'C' = \ldots.$$

Pentru calota mică, *arcul* PB (sau PC, etc.) se cheamă *rază polară*; tot astfel *arcul* P′B (sau P′C, etc.) este raza polară a calotei mari.

Dacă cele două calote sunt egale (emisfere), razele polare devin egale şi anume cu câte un arc de 90°.

Descrierea cercurilor mici se face cu ajutorul unui compas, cu braţe curbe, numit *compas sferic*; vârful unuia din picioare se fixează într'un punct al sferei, punct care este *polul* cercului obţinut prin urma lăsată pe sferă de vârful celuilalt picior (fig. 168).

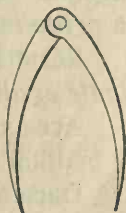


Fig. 168.

Aplicaţie. Planul dus prin Bucureşti (punctul B), perpendicular pe axa PP′ a polilor, taie sfera pământului după un cerc numit *paralelul Bucureştiului* (Fig. 169).

Acest paralel este baza a două calote, una cu polul în P, alta cu polul în P′.

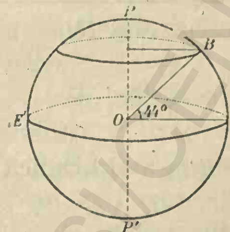


Fig. 169.

Latitudinea Bucureştiului fiind egală cu $\sphericalangle EOB = 44^0$, rezultă că arcul BE de cerc mare (de meridian) este de 44°; deci arcul PB = 46°; iar arcul BEP′ = 134°

Raza polară cea mai mică a paralelului considerat este arc PB = 46°

Pentru a afla *lungimea* razei polare, adică a arcului PB ţinem seama că raza sferei pământeşti este R = 6.600 km şi putem face următoarea regulă de trei:

la un arc de 360°, corespunde o lungime de $2\pi R = 40.000.000$ m

la un arc de 46°, corespunde x

de unde $x = \text{arc } PB = 5.100.000\ m$.

Suprafaţa unei zone sferice. Fie o sferă de centru O şi rază R (fig. 170). Să împărţim un diametru oarecare PP′ într'un număr de părţi egale prin punctele ABCD, adică:

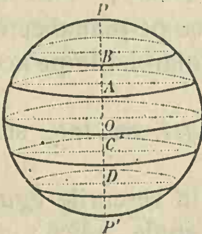


Fig. 170.

$$PB = BA = AO = OC = CD = DP'$$

Prin punctele ABCD, să ducem plane perpendiculare pe diametrul PP′, care taie sfera după nişte cercuri; în (fig. 170), suprafaţa sferei s'a despărţit astfel în *patru* zone sferice şi *două* calote, adică de fapt în *şase* zone (dintre care două sunt calote).

Să observăm că toate aceste zone au *aceeaşi înălţime*; în cazul de mai sus, ea este egală cu *a şasea parte din diametrul sferei, adică*:

$$I = \frac{PP'}{6}$$

Dacă suprafaţa acestei sfere ar fi făcută din tablă [1]) spre exemplu şi am măsura aria fiecărei zone şi a calotelor, am găsi că *ariile lor sunt egale*.

Rezultă de aci, că *pe aceeaşi sferă, două zone, care au înălţimile egale au şi ariile egale.*

Acelaş rezultat, pentru două calote sau pentru o zonă şi calotă cu înălţimi egale, şi situate pe sferă.

Dacă am voi să aflăm, care este baza B a unui dreptunghiu, care are înălţimea I, egală cu a uneia din zonele de mai sus şi suprafaţa egală cu aceea a orcăreia dintre aceste zone, trebuie să scriem (fig. 171):



Fig. 171.

aria zonei măsurate = aria dreptunghiului

sau (1) $S = B \times I$

iar baza B se află împărţind aria zonei prin înălţimea ei I, adică:

$$B = \frac{\text{aria zonei}}{I}$$

Făcând calculele se găseşte că lungimea B este egală *cu lungimea unui cerc mare al sferei, adică* $B = 2\pi R$.

[1]) Deoarece suprafaţa sferei *nu este desfăşurabilă*, o tăiem în bucăţele mici şi o măsurăm.

Acest rezultat se obţine, *oricare* ar fi sfera şi *oricare* ar fi numărul de zone în care am *împărţi* suprafaţa ei, cu condiţia însă ca toate aceste zone *să aibă aceeaşi înălţime I.*

Din relaţia (1) avem deci :

(2) $$\text{Aria zonei sferice} = 2\pi R \times I$$

adică : *aria unei zone sferice este egală cu lungimea unui cerc mare, înmulţită cu înălţimea zonei.*

Formula (2) se aplică şi pentru aria unei calote sferice, care este, după cum s'a arătat (pag. 117) tot o zonă sferică.

Observare. Din formula suprafeţei unei zone : $S = 2\pi R \times I$, rezultă că această suprafaţă este echivalentă cu suprafaţa unui cilindru drept, având ca bază un cerc mare al sferei şi înălţimea egală cu înălţimea zonei (fig. 172).

In cazul unei sfere (zonă cu înălţimea egală cu diametrul sferei) cilindrul echivalent are ca înălţime diametrul sferei.

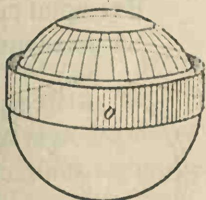


Fig. 172.

Aplicaţii.

1. *O zonă sferică are înălţimea $I = 3{,}5$ m, iar raza sferei este $R = 5$ m; să se afle aria zonei.*

R: Avem :
Aria zonei sferice $= 2\pi R \times I = 2\pi \times 5\,m \times 3{,}5\,m = 109{,}90\,m^2$.

2. *Intr'o sferă cu rază $R = 1$ dm se duce un plan la o distanţă $d = 3$ cm de centrul ei. Care este aria calotei mici astfel formate ?*

R: Inălţimea calotei este $I = 10\,cm - 3\,cm = 7\,cm$ deci: aria calotei $= 2\pi R \times I = 2\pi \times 10\,cm \times 7\,cm = 439{,}60\,cm^2$.

Suprafaţa sferei. Dacă tăiem o sferă de rază R, printr'un plan, care trece prin centru, suprafaţa sferei se desparte în două calote egale (emisfere).

Inălţimea uneia din aceste calote este $I = R$, deci suprafaţa ei este $2\pi R \times R = 2\pi R^2$; rezultă deci că :

(3) $$\text{Supr. sferei} = 2 \times 2\pi R^2 = 4\pi R^2$$

adică: *suprafaţa unei sfere este egală cu de patru ori suprafaţa unui cerc mare*[1]).

Aplicaţie. Care este suprafaţa unui glob în formă de sferă, cu raza de 40 metri?

R: $S = 4\pi \times 40^2 = 20096$ m^2.

Observare. Când despărţim o sferă în zone de *înălţimi egale* (vezi fig. 170), s'a arătat că *prin măsurare*, se constată că ariile acestor zone sunt şi ele egale, deşi după o simplă privire ni s'ar părea, că zonele mai apropiate de centru au o arie mai mare.

Cauza acestei impresiuni este că sfera are o suprafaţă *curbă;* se zice că din cauza *curburei* sferei nu ne putem da seamă de egalitatea zonelor.

Exemplul ce urmează este de aceeaşi natură.

Să presupunem că petrecem dealungul unui meridian pământesc o sfoară, care să fie egală *exact* cu lungimea meridianului; tăiem apoi sfoara, îi adăogăm un metru şi apoi o petrecem din nou în formă de cerc (fig. 173), concentric cu meridianul.

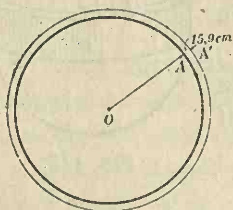


Fig. 173.

Intre pământ şi cercul format din sfoara astfel lungită cu 1 metru, ar încăpea mâna?

Un calcul simplu ne arată că acest lucru este posibil. Intr'adevăr, lungimea sfoarei era la început 40.000.000 metri iar la sfârşit 40.000.001 metri.

Insemnând cu R raza pământului şi cu R′ raza cercului exterior, avem:

$$2\pi R' = 40.000.001$$
$$2\pi R = 40.000.000$$

deci:

$$2\pi (R' - R) = 1 \text{ metru}$$

sau:

$$AA' = R' - R = \frac{100 \text{ cm}}{2\pi} = 15,9 \text{ cm}.$$

adică rămâne loc suficient ca să introducem mâna, chiar pe lat, între pământ şi sfoară.

[1]) Se atrage atenţiunea elevilor că la rezultatul (2), nu s'a ajuns printr'o *demonstraţie,* ci printr'o *măsurare* pe un caz concret.

Volumul sferei. Pe sfera pământească, dacă considerăm o suprafaţă relativ mică, spre exemplu suprafaţa unei clădiri, a unui teren, chiar suprafaţa unei moşii, avem *impresiunea* că ea este o suprafaţă plană şi aceasta cu atât mai mult cu cât suprafaţa este mai mică.

Să împărţim suprafaţa unei sfere în părticele *foarte mici*, cu ajutorul unor linii curbe care se întretaie formând un fel de reţea, aşa cum, spre exemplu, plasa unei mingii desparte suprafaţa ei în ochiuri mici; fie *abcd* una din aceste porţiuni din suprafaţa sferei. (fig. 174).

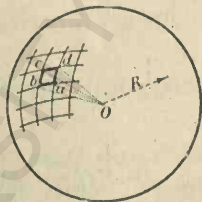


Fig. 174.

Unind centrul O al sferei cu punctele, care mărginesc patrulaterul curb *abcd*, obţinem o piramidă *foarte mică*, cu vârful în O şi cu baza *abcd*, pe care în urma celor de mai sus o putem considera ca fiind plană; fie a_1 aria patrulaterului *abcd*, şi $a_2, a_3, \ldots$ ariile celorlalte patrulatere formate pe sferă.

Toate piramidele au aceeaşi înălţime *I*, egală cu raza *R* a sferei.

Volumul sferei se descompune astfel într'un număr *foarte mare* de piramide, fiecare dintre ele fiind însă *foarte mică.*

Volumul sferei va fi deci egal cu suma volumelor acestor piramide adică:

$$V_{\text{sferei}} = a_1 \times \frac{R}{3} + a_2 \times \frac{R}{3} + a_3 \times \frac{R}{3} + \ldots$$

sau:

$$V = \frac{R}{3}(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots)$$

însă suma ariilor: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ este egală cu suprafaţa sferei, $4\pi R^2$, deci:

$$(4) \quad \boxed{V = \frac{R}{3} \cdot 4\pi R^2 = \frac{4\pi R^3}{3}}$$

adică: *volumul unei sfere este egal cu suprafaţa sferei înmulţită cu o treime din lungimea razei.*

Aplicaţie. Care este volumul unui balon sferic, cu diametrul D = 10 m.?

R: Raza balonului este R = 5 *m*, deci:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5^3 = 523{,}333\ m^3$$

REZUMAT.

CAP. X. — SFERA.

* *Sfera* este un corp geometric mărginit de o suprafaţă, ale cărei puncte sunt egal depărtate de un punct din interior, numit *centrul* sferei; distanţa dela un punct oarecare al sferei la centru este egală cu raza sferei.

* Suprafaţa sferei poate lua naştere prin rotirea unui cerc in jurul unuia din diametrii lui.

* Faţă de o sferă, un punct poate fi: interior, pe sferă şi exterior; distanţa sa la centrul sferei este respectiv mai mică, egală sau mai mare ca raza sferei.

* Segmentul de dreaptă, care uneşte două puncte ale sferei se chiamă *coardă*. O coardă ce trece prin centrul sferei se numeşte *diametru;* un diametru este egal cu două raze.

* Faţă de o sferă, un plan poate fi:

1. *Secant*, în care caz taie sfera după un cerc; acest cerc este: un *cerc mare*, dacă planul trece prin centrul sferei, în caz contrar este un *cerc mic*.

2. *Tangent*, în care caz atinge sfera, într'un singur punct (sau după un cerc redus la un punct).

3. *Exterior*, când nu are nici un punct comun cu sfera.

Distanţa centrului sferei la plan, este respectiv mai mică, egală sau mai mare ca raza sferei.

* Între raza R a sferei, raza r a unui cerc mic şi distanţa d dela centrul sferei la planul cercului mic, există relaţiunea:

$$R^2 = d^2 + r^2$$

* *Zonă sferică* este o porţiune din suprafaţa unei sfere, cuprinsă între două plane paralele; cercurile de secţiune între sferă

şi aceste plane sunt *bazele* zonei, iar distanţa între aceste baze se chiamă *înălţimea* zonei.

* Un plan, care taie sfera, o desparte în două calote, care sunt de fapt zone cu o singură bază: cercul de secţiune.

Când planul trece prin centrul sferei, cele două calote se numesc *emisfere*.

Înălţimea calotei este porţiunea din perpendiculara ridicată în centrul bazei ei, şi limitată la suprafaţa sferei; extremitatea înălţimii se chiamă vârful calotei.

* Orice cerc are doi *poli*, care sunt extremităţile diametrului perpendicular pe cerc în centrul lui.

* *Rază polară* este lungimea arcului de cerc mare dus prin diametrul perpendicular pe planul cercului, cuprins între vârful calotei şi intersecţiunea lui cu cercul de bază al sferei.

* Suprafaţa S a unei zone (sau calote) sferice este egală cu lungimea unui cerc mare $2\pi R$ înmulţită cu înălţimea I a zonei:

$$S = 2\pi R \times I$$

* Suprafaţa sferei este egală cu suprafaţa a patru cercuri mari:

$$S = 4\pi R^2$$

* Volumul sferei este egal cu suprafaţa sferei înmulţită cu o treime din lungimea razei:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

EXERCIŢII.

1. *Să se calculeze suprafaţa şi volumul unei sfere cu diametrul* d = *3,5 cm.*

R : S = 38,4650 cm²; V = 44,619 cm³.

2. *Care este greutatea unei mingii în formă de sferă, ştiind că raza exterioară este* R = *7 cm iar grosimea gumei din care este făcută mingia* e = *3 mm (Densitatea = 0, 62).*

R : G = V × *d* = 110 g.

3. *Se cere suprafaţa unei zone sferice, care face parte dintr'o sferă de rază* R = *1 dm, înălţimea ei fiind* I = *3, 4 dm.*

R : S = 31,35 dm².

4. *Să se afle suprafaţa unei calote cu raza bazei de 3 cm. şi cu înălţimea de 2,5 cm.*

R : Se găseşte *:* R = 3,5 cm ; *s* = 47,88 cm².

5. *Să se calculeze volumul sferei înscrise şi al sferei circumscrise unui cub, a cărui diagonală este* $2\sqrt{3}$ *m.*

R : $D^2 = 3\ a^2;\ a^2 = \frac{D^2}{3} = \frac{(2\sqrt{3})^2}{3} = 4;\ a = 2.$

V. sf. înscrise $= \frac{4}{3}\pi\, 1^2 = \frac{12,56}{3} = 4,187\ m^3$

V. sf. circumscr. $= \frac{\pi D^3}{6} = \frac{3,14 \times 24\sqrt{3}}{6} = 21,728800\ m^3$

6. *Intr'o sferă cu suprafaţa de 78,50 m² se face o secţiune ; ştiind că distanţa dela un punct al secţiunii la polul cel mai apropiat al ei este de 2 m, să se afle :*

1) Suprafaţa calotei mici, 2) volumul conului, care are ca bază secţiunea şi ca vârf polul cel mai depărtat al ei.



Fig. 175.

R : R. sf. = 2,5 m ; notând cu *h* înălţimea calotei, avem :

$5 \times h = 2^2 \qquad h = 0,8$ m.

S. cal. = 2 × 3,14 × 2,5 × 0,8 = 12,56 m³.

Vol. con. $= \frac{3,14 \times 3,36 \times 4,2}{3} = 14,770560\ m^3.$

7. *O sferă de metal are diametru* D = *5 cm ; introducând'o într'un inel în formă de cerc, acesta este un cerc mare pentru sferă. Se scoate sfera şi se încălzeşte astfel că diametrul ei devine :* D' = *5,3 cm (fig. 175).*

Introducând din nou sfera în inel, se cere să se afle distanța x *a centrului sferei la planul inelului.*

R: Se va observa că după încălzirea sferei, inelul este un cerc mic pentru sferă; x este o catetă într'un triunghiu dreptunghiu, având ipotenuza de $\frac{5{,}3\text{ cm}}{2}$ şi cealaltă catetă de $\frac{5\text{ cm}}{2}$.

Deci $x = \frac{1}{2}\sqrt{5{,}3^2 - 5^2} = \frac{1{,}7}{2} = 0{,}85$ cm.

8. *Se dă un con echilateral (G = D) cu raza de 4 dm. Să se calculeze volumul sferelor înscrise şi circumscrise acestui con.*

R: 1. $r = a_3 = \frac{4}{\sqrt{3}}$

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{256 \times 3{,}14}{9 \times 1{,}75} = 51{,}687 \text{ m}^3$$

2. $R = \frac{8}{\sqrt{3}}$; $V = 413{,}016 \text{ m}^3$;

CAP. XI.

APLICAŢIUNI CARE SE REZOLVĂ PRIN ARITMETICA ŞI ALGEBRĂ.

1. *O cameră are forma unui parpalelipiped dretunghiu. Perimetrul podelei este de 20 m., iar diferenţa dintre cele două dimensiuni ale ei este de 1 m. Ştiind că înălţimea ei este cu* 1 m. *mai mică decât lăţimea, să se afle cât va costa zugrăvitul ei, dacă metrul pătrat costă 10 lei?*

Fie L, l dimensiunile podelei, I înălţimea camerei, C costul zugrăvitului; aflăm:

R: $l = 4{,}5$ m; L $= 5{,}5$ m; I $= 3{,}5$ m; C $= 947{,}50$ lei.

2. *Un corp în formă de cub cu latura* a, *se dilată prin încălzire şi rămâne tot în formă de cub.*

Ştiind că temperatura cubului a crescut cu 1^0, *iar unitatea de lungime din fiecare dimensiune a cubului s'a mărit cu cantitatea l, se cere să se scrie:*

a) *Expresiunea volumului* V *al cubului, după dilatare,*

b) *Expresiunea volumului* V', *cu care s'a dilatat cubul dela început,*

c) *Expresiunea* v, *a volumului cu care s'a dilatat unitatea de volum.*

R: Dacă unitatea de lungime se lungeşte (pentru un spor de temperatură de 1^0) cu cantitatea l, înseamnă că ea devine: $1 + l$; deci o dimensiune egală cu a unităţi, va deveni: $a\,(1 + l)$.

Volumul cubului dilatat va fi:

1. $$V = a^3 (1 + l)^3 = a^3 (1 + 3\,l + 3\,l^2 + l^3).$$

Volumul, cu care cubul iniţial s'a dilatat, va fi:

2. $$V' = V - a^3 = a^3 (3\,l + 3\,l^2 + l^3).$$

3. Dacă volumul a^3 se dilată cu V', unitatea de volum se dilată cu:

$$v = \frac{V'}{a^3} = 3\,l + 3\,l^2 + l^3$$

3. *O grindă de fier în formă de prismă dreaptă cu baza de forma şi dimensiunile din fig. 176, are o lungime de 8,50 m.*

In timpul verei, grinda se dilată din cauza căldurii, în sensul lungimii ei, cu 2,4 cm.

Presupunând că suprafaţa bazei rămâne aceeaşi, se cere:

1. Volumul iniţial şi final al grinzii,

2. Cu cât s'a lungit un metru din lungimea grinzii,

3. Ştiind că dilatarea s'a produs pentru o creştere de temperatură de 20⁰, se cere să se calculeze cu cât s'ar fi lungit un metru din lungimea grinzii, dacă temperatura ar fi crescut numai cu un grad.

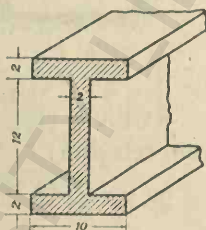


Fig. 176.

R: 1. Vol. iniţial $= (2 \times 10^{cm} \times 2^{cm} + 12^{cm} \times 2^{cm}) . 850^{cm}$
$= 54{,}400 \text{ dm}^3$.

Vol. final $= (2 \times 10^{cm} \times 2^{cm} + 12^{cm} \times 2^{cm}) . 852{,}4^{cm}$
$= 54{,}553600 \text{ dm}^3$.

2. Un metru din lungimea grinzii s'a lungit cu:

$$\frac{2{,}4^{cm}}{850} = 0{,}0028 \text{ cm}.$$

3. Pentru o creştere a temperaturei cu un grad, un metru s'ar lungi cu $\frac{0{,}0028}{20} = 0{,}000140$ cm.

4. *Să se calculeze volumul coloanelor, care au secţiunea*

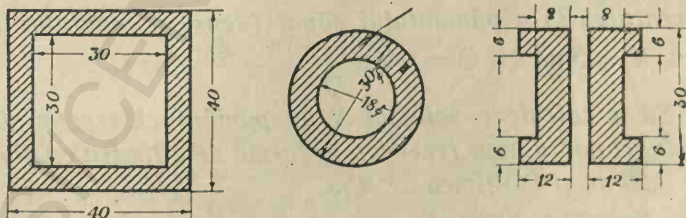


Fig. 177.

dreaptă cu dimensiunile în cm. din figura 177 şi înălţimile I, *respectiv de 2,8 m, 2,30 m, 2,60 m.*

R: *a)* 196 dm³ *b)* 415,987 dm³ *c)* 149,766 dm³.

5. *Un basin în formă de prismă dreaptă are o înălţime* I = *4 m., iar baza este un trapez* ABCD *de arie 26 m² şi înălţime 4 m; diferenţa între bazele trapezului fiind 3 m, se cere: să se calculeze aceste baze şi volumul* V *al apei, pe care o poate inmagazina basinul* (fig. 178).

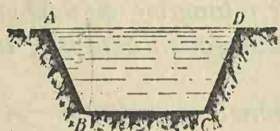


Fig. 178.

R: Fie x şi y respectiv baza mică şi baza mare a bazinului; avem relaţiile:

$26\ m^2 = \frac{(x+y)\,4\ m}{2}$ şi $y - x = 3$ m., din care rezultă $x = 5$ m, $y = 8$ m; $V = 26\ m^2 \times 4\ m = 104\ m^3$.

6. *Un paralelipiped dreptunghiu are dimensiunile 2 m, 3 m, şi 5 m; dacă primele două dimensiuni sporesc cu aceeaşi lungime* a, *cu cât sporeşte suprafaţa totală şi volumul?*

R: $S_t = 2\,(2 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 2) = 62\ m^2$

$V = 2 \times 3 \times 5 = 30\ m^3$

$S_t = 2\,[(2+a)\,3 + (3+a)\,5 + 5 \times 2] = 62\ m^2 + 16\,a$

$V = (2+a)\,(3+a)\,5 = 30\ m^3 + 5\,a^2 + 25\,a$

7. *Un şanţ lung de 10 metri are forma unei prisme drepte cu baza un trapez isoscel cu dimensiunile (în m.) din figura 179. Se cere să se calculeze volumul* V *şi greutatea* G *a pământului săpat (dens. pământului 1,8).*

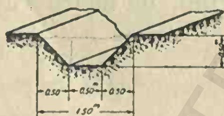


Fig. 179.

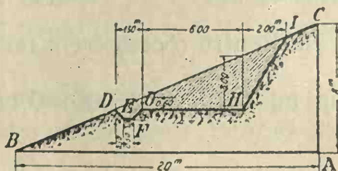


Fig. 180.

R: V = 5 m³ G = 9 kg.

8. *Să se calculeze volumul* V *de pământ ce trebue săpat pentru îngroparea unui rezervor în formă de cilindru cu diametrul de 3,20 m. şi înălţimea de 4 m.*

R: V = 32,153600 m³.

9. *Dintr'o prismă dreaptă de pământ cu baza un triunghiu dreptunghiu* ABC *şi lungime 1 km., se sapă părţile însemnate cu linii înclinate, astfel că secţiunea rămasă este* BDEFGHICAB *şi are dimensiunile indicate în fig. 180.*

Să se calculeze costul transportului pământului săpat, ştiind că 1 m³ transportat costă 15 lei.

10. *Să se calculeze volumul plăcilor de beton (amestec de*

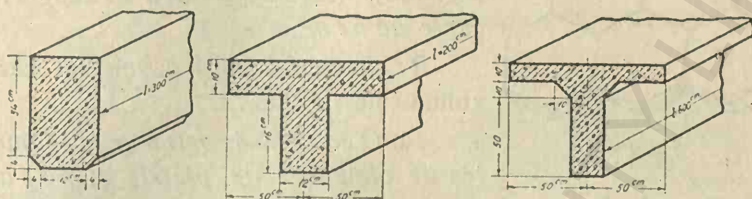


Fig. 181.

ciment, nisip şi pietriş), care au forma unor prisme drepte cu dimensiunile în centimetri arătate în figura 181.

R: Se găseşte:

a) $V = 223200\ cm^3$ *b)* $V = 238400\ cm^3$ *c)* $V = 1380000\ cm^3$.

11. *Un vas de tablă are forma şi dimensiunile în cm. din figura 182 fiind format din paralelipipede dreptunghice; vasul fiind aşezat pe o suprafaţă plană orizontală, se toarnă în el 5 litri de apă.*

La ce înălţime x se va ridica apa în braţele verticale ale vasului.

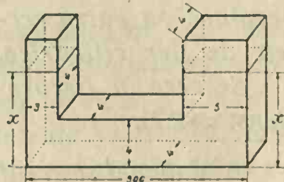


Fig. 182.

R: În baza principiului vaselor comunicante, apa se va ridica la aceeaşi înălţime în ambele braţe. Obţinem ecuaţia de gradul întâiu cu o necunoscută:

$$5000\ cm^3 = 292^{cm} \times 4^{cm} \times 4^{cm} + 3^{cm} \times 4^{cm} \times x + 5^{cm} \times 4^{cm} \times x$$

deci:

$$x = \frac{5000\ cm^3 - 4672\ cm^3}{32\ cm^2} = 10{,}25\ cm.$$

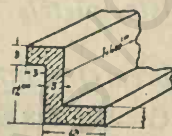


Fig. 183.

12. *Să se calculeze volumul şi greutatea grinzilor (prisme drepte) de fier având secţiunea dreaptă ca în figurile 183 şi 184, în care dimensiunile sunt în cm. (dens. = 7,8).*

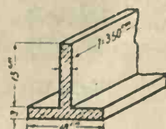


Fig. 184.

R: $V_1 = 48{,}600\ dm^3$ $G_1 = 379{,}080\ kg.$ $V_2 = 34{,}650\ dm^3$ $G_2 = 270{,}270\ kg.$

13. *Să se calculeze volumul pavelelor în formă de prismă dreaptă exagonală (latura exagonului e 1 dm; grosimea pavelei e de 1,4 cm.),* (fig. 185), *necesare pentru a acoperi o curte de 52 m².*

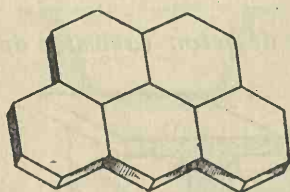


Fig. 185.

R: Trebuesc 2004 pavele, al căror volum este 728 dm³.

14. *O coloană de beton armat (amestec de ciment, nisip, pietriş şi fer) are o secţiune de forma şi dimensiunile (în centimetri) din figura 186 şi o înălţime de 1 m. In cazul* a) *secţiunea este un pătrat cu un fier tot în formă de pătrat; în cazul* b) *secţiunea este dreptunghiulară şi conţine patru vergele de fier cilindrice,* c) *secţiunea este circulară cu patru vergele de fier cilindrice.*

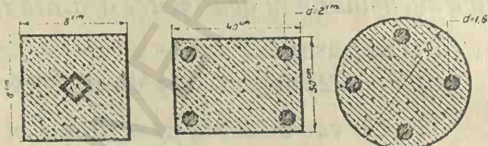


Fig. 186.

Se cere în fiecare caz: 1. volumul şi greutatea betonului (dens. = 2,2).

2. Volumul şi greutatea fierului (dens. = 7,8).

R: *(a)* $V_b = 6{,}300$ dm³ — *(a)* $G_b = 13{,}860$ kg
$V_f = 100$ cm³ — $G_f = 0{,}780$ kg
(b) $V_b = 118{,}744$ dm³ — *(b)* $G_b = 261{,}2368$ kg
$V_f = 1256$ cm³ — $G_f = 9{,}7968$ kg
(c) $V_b = 69{,}846$ dm³ — *(c)* $G_b = 153{,}661$ kg
$V_f = 803{,}840$ cm³ — $G_f = 6{,}270$ kg

15. *Să se afle volumul şi greutatea unei plăci prismatice drepte de beton armat (amestec de ciment, nisip, pietriş şi fier) (dens. 2,4).*

Dimensiunile sunt date în cm (fig. 187).

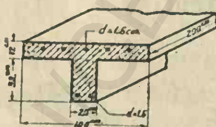


Fig. 187.

R: V = 365186,560 cm³ G = 876,448 kg.

16. *Un bloc de zidărie în formă de paralelipiped dreptunghiu, are o dimensiune egală cu 4 metri, raportul celorlalte două este 3, iar volumul* V = *192 m³.*

Se cere dimensiunile blocului.

R: Fie x o dimensiune necunoscută a blocului, cealaltă este $3x$; deci $3x^2 \times 4 = 192$ m³, $x = 4$ m; $l = 12$ m, adică blocul are forma unui paralelipiped cu baza pătrată.

17. *Să se calculeze greutatea lemnului cuprins într'un ster (un cub cu latura de 1 m) (fig. 188),*

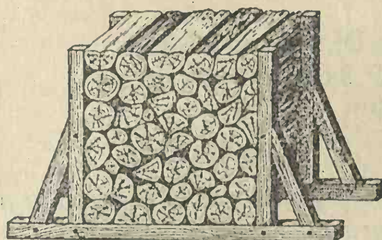


Fig. 188.



Fig. 189.

ştiind că lemnul ocupă 76 % din spaţiul sterului (densitatea lemnului : 0,8).

R: G = 608 kg.

18. *O şură de grâu are forma şi dimensiunile din figura 189. Să i se afle volumul.*

R: Vol. = 825 m³.

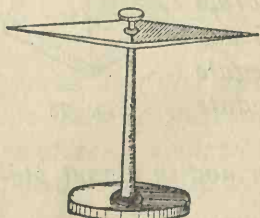


Fig. 190.

19. *Un ac magnetic* ab, *are forma unui paralelipiped dreptunghiu cu baza un romb cu diagonalele de 8 cm. şi 1,5 cm, iar grosimea acului este de 2 mm. (fig. 190).*

Se cere să se calculeze greutatea acului, ştiind că densitatea sa este 7,8.

R: $$\text{Gr.} = \left(\frac{8^{cm} \times 1{,}5^{cm} \times 0{,}2^{cm}}{2} \right) 7{,}8 = 9{,}36 \text{ grame.}$$

20. *O sferă* S, *cu raza* r = *3 cm. este atârnată de platanul unei balanţe cu braţe egale şi se cufundă într'un vas cu apă (fig. 191); ştiind că balanţa este în echilibru când în platanul din dreapta se pune 1 kg., se cere să se afle densitatea sferei.*

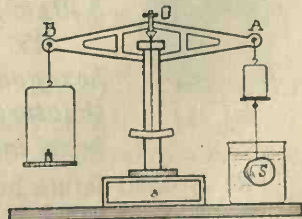


Fig. 191.

R: Se va aplica principiul lui Archimede: greutatea sferei mai puţin greutatea volumului de apă dislocuit face 1 kg.

De aci se află: dens. sf. = 9,8.

21. *O grindă de lemn în formă de paralelipiped dreptunghiu se ciopleşte dintr'un arbore în formă de cilindru circular drept, diametrul cilindrului fiind D = 28 cm.*

Care este greutatea unui metru liniar din această grindă, dacă între dimensiunile x *şi* y *ale secţiunii sale drepte, există relaţia :* $y = x\sqrt{3}$?

(Densitatea lemnului 0,9).

R: Din relaţiile: $x^2 + y^2 = D^2$, $y = x\sqrt{3}$, rezultă $x = 14$ cm. şi $y = 14\sqrt{3}$ cm. $= 24,22$ cm.

Greutatea $= (x^{cm} \cdot y^{cm} \cdot 100^{cm})\ 0,9 = 30517,2$ grame $= 30,5172$ kg.

22. *Să se calculeze volumul* V *şi greutatea* G *a corpului de plumb din figura 192 care are dimensiunile arătate şi densitatea 11 (firul cu plumb).*

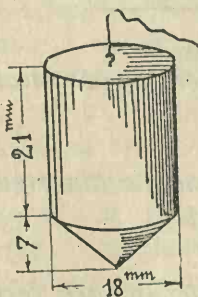


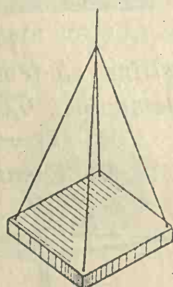
Fig. 192.

R: Se găseşte:

$V = 1127,574$ mm³.

$G = 12,403$ gr.

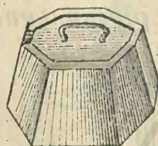
23. *Un platan în formă de pătrat cu latura 2,5 dm. este susţinut cu 4 fire egale fiecare cu 4 dm. şi înodate într'un punct (fig. 193).*


Fig. 193.

Se cere să se calculeze distanţa d, *dela nod la planul platanului.*

R: $d = 3,6$.

24. *O greutate de 1 kg. are forma unui trunchiu de piramidă cu baze octogonale; suprafeţele bazelor fiind de 4,20 cm² şi 2,30 cm², iar înălţimea de 3,40 cm., se cere să se afle densitatea (fig. 194).*


Fig. 194.

25. *Să se calculeze volumul unei piramide hexagonale drepte, ştiind că suma dintre muchie şi latura bazei este de 5 dm. şi că perimetrul bazei întrece dublul muchiei cu 6 dm.*

R: Notând latura hexagonului cu x şi muchia cu y obţinem sistemul : $\begin{cases} x + y = 5 \\ 6x = 2y + 6 \end{cases}$.

Rezolvând, avem: $x = 2$; $y = 3$; $l^2 = 3^2 - 2^2 = 5$; $l = \sqrt{5} = 2,236$ dm.

Vol. $= 7,736560$ dm³.

26. *Dimensiunile unui tetraedru tridreptunghiu sunt* OA=*3m*, OB=*2m şi* OC = x; *se cere să se calculeze:*

1. dimensiunea x, *ştiind că volumul tetraedrului este de 36 m³.*
2. lungimea laturilor bazei ABC.

R: 1. $\frac{3 \text{ m}. 2 \text{ m}. x}{6} = 36 \text{ m}^3$, deci $x = 36$ m.

2. avem: $AB = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ m;
$BC = \sqrt{2^2 + 36^2} = \sqrt{1300}$ m; $CA = \sqrt{36^2 + 3^2} = \sqrt{1305}$ m.

27. *Muchiile* OA, OB, OC *ale unui tetraedru tridreptunghiu sunt egale cu 1,5 m; să se afle volumul tetraedrului şi distanţa* x *a vârfului* O *la baza* ABC.

R: 1. $V = \frac{1}{6} \cdot 1{,}5^3 = 0{,}562500 \text{ m}^3$

2. Avem $V = \frac{\text{aria (ABC)} . x}{3}$; ABC este un triunghiu echilateral de latură $l = \sqrt{4{,}50}$ m.

şi de arie $= \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = 1{,}9462 \text{ m}^2$; deci $x = \frac{3 V}{\text{aria (ABC)}} = 0{,}86$m.

28. *Intr'un con, suma dintre generatoare şi rază este de 7 dm, iar îndoitul generatoarei întrece triplul razei cu 1,5 dm. Să se afle: 1) volumul acestui con, 2) volumul piramidei cu bază patrată, înscrisă în acest con.*

R: y fiind generatoarea şi x raza avem:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2y - 3x = 1{,}5 \end{cases} \quad x = 2{,}5 \text{ dm}; \; y = 4{,}5 \text{ dm}; \; l = \sqrt{4{,}5^2 - 2{,}5^2} = 3{,}74 \text{ dm}.$$

Vol. con $= 24{,}465 \text{ dm}^3$

Vol. pir. $= \frac{2 R^2 \times l}{3} = \frac{2 \times 6{,}25 \times 3{,}74}{3} = 15{,}583 \text{ dm}^3$.

29. *Un rezervor cilindric (circular drept) are diametrul cercului de bază* D = *3,20 m. egal cu înălţimea* I.

Se cere să se calculeze câţi metri pătraţi de tablă sunt necesari pentru învelirea acestui rezervor?

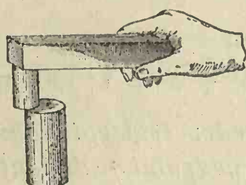
Care este capacitatea rezervorului?

R: Suprafaţa totală $= 48{,}2304 \text{ m}^2$.
Volumul $= 25{,}72288$ kl.

30. *Cât cântăreşte un tub cilindric de fontă (densitatea 7,8), lung de 4 m., cu diametrul exterior de 5 dm. şi cu cel interior de 40 cm.?*

R: $Gr. = (V - v) \times 7,8 = \pi \times I (R^2 - r^2) \times 7,8.$
$= 3,14 \times 4 \times 7,8 (0,25^2 - 0,20^2) = 2,204281$ tone.

31. *Un magnet* M *atrage un cilindru circular drept de fier, cu înălţimea de 3 cm. şi raza bazei de 0,4 cm.; acest cilindru la rândul lui, atrage un alt cilindru egal cu el, iar acesta pe un al treilea..., astfel că la sfârşit magnetul menţine în aer cinci cilindri egali între ei (fig. 195).*


Fig. 195.

Care este greutatea tuturor cilindrilor atraşi de magnet? (Densitatea fierului 7,8).

R: Greutatea unui cilindru este:

$G = \pi (0,4 \text{ cm})^2 \times 3 \text{ cm} \times 7,8 = 11,7$ grame, deci greutatea a cinci cilindri va fi 58,5 grame.

Observare. Fenomenul de atracţie de mai sus, se numeşte magnetizare prin influenţă.

32. *In exemplul precedent, razele celor cinci cilindri sunt egale între ele cu 1 cm., iar înălţimea lor este* x.

Să se afle această înălţime x, *ştiind că greutatea celor cinci cilindri de fier este de 2 kg.*

R: Se obţine ecuaţia de gradul întâi:

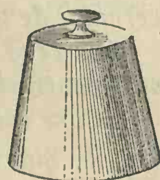
$$5. \pi. 1^2. x. 7,8 = 2 \text{ kg}$$
$$= 2.000 \text{ gr.}$$
$$x = 16,33 \text{ cm.}$$

33. *Un pahar de forma unui con circular drept, are lungimea cercului de 37,68 cm. şi capacitatea de 301,44 ml. Câtă apă trebuie să turnăm în el, dacă vrem ca lichidul să se ridice la 3/4 din înălţime?*

Se notează: R = raza cercului de bază, r = raza cercului care mărgineşte volumul V al apei; I înălţimea paharului, i înălţimea apei în pahar.

R: R = 6 cm; I = 8 cm; i = 6 cm; r = 4,5 cm;
V = 127,170 cm^3 = 127,17 ml.

34. *Care este greutatea unui trunchiu de con făcut din fier (densitatea 7,8) cu raza bazei mari* R = *5 cm., raza mică* r = *2,8 cm. şi înălţimea de 3,3 cm.? (fig. 196).*


Fig. 196.

R: G = 1261, 923 gr.

35. *Intr'un cilindru de diametru* D = *300 mm., lungimea cursei pistonului este de 400 mm.*

Pistonul găsindu-se la început la unul din capetele cilindrului, se întreabă cu câţi milimetri trebue mişcat pistonul astfel ca volumul gazului G să scadă cu $\frac{1}{5}$ din valoarea pe care o avea la început.

R: 1. Volumul gazului la început este:

$$V = \pi \frac{(300\ mm)^2}{4} \cdot 400 mm = 28260\ cm^3$$

2. Fie x distanţa (în mm.), cu care trebuie să mişcăm pistonul; x este dat de relaţia:

$$x. \frac{\pi D^2}{4} = \frac{1}{5} \frac{\pi D^2}{4} \cdot 400\ mm.$$

adică $x = 80\ mm = 8\ cm$.

36. *Care sunt dimensiunile unei bobine în formă de cilindru circular drept, dacă un fir de metal de 360 metri lungime se înfăşoară pe el de 6.000 ori, astfel că pe 1 cm. din înălţimea cilindrului se găsesc înşirate 15 spire (spirele nu se împletesc unele peste altele ci numai pe suprafaţa cilindrului).*

R: Fie x raza cilindrului, y înălţimea sa.

$$y = \frac{6.000\ spire}{15\ cm} = 400\ cm.$$

$$2 \pi x \times 6000 = 36000, \quad x = 0,95\ cm.$$

37. *Dintr'un arbore în formă de cilindru circular drept, cu diametrul cercului de bază* D = *24 cm. şi înălţimea* l = *4,50 m. se ciopleşte o grindă în formă de paralelipiped dreptunghiu, laturile dreptunghiului lui de bază fiind* x *şi* y.

Se cere:

1. *Să se calculeze volumul lemnului cioplit, ştiind că înălţimea* y *a dreptunghiului este de două ori mai mare decât baza* x.

2. *Greutatea grinzii paralelipipedice (densitatea lemnului 0,9).*

R: Dreptunghiul de dimensiuni x, y fiind înscris în cercul de diametru D, există relaţiile:

$x^2 + y^2 = D^2$, $y = 2x$, deci: $x = 10,018$ cm, $y = 20,036$ cm.

1. Volumul lemnului cioplit = vol. cilindr. — vol. paralelip. $= 203.472\ cm^3 - 90.324\ cm^3 = 113148\ cm^3$

2. Greutatea grinzii = Vol. grinzii $\times$ 0,9 = 81,2916 kg.

38. *Se dă sistemul:*

$$\begin{cases} \frac{3x - y}{2} - \frac{7x + 1}{3} = \frac{y}{4} - 6 \\ \frac{2x}{5} - \frac{9y}{2} = x - 12 \end{cases}$$

x *fiind raza unei sfere şi* y *distanţa de centru a unei secţuni făcute în această sferă (amândouă fiind exprimate în dm.), să se afle volumul conului, care are ca bază secţiunea şi ca vârf centrul sferei.*

R: R = 5 dm; d = 2 dm; V = 43,460 dm^3.

CAP. XII.

ANALIZA CÂTORVA ORNAMENTE ARTISTICE, CU CARACTER GEOMETRIC.

Corpurile geometrice simple, ca planul, prisma, paralelipipedul, piramida, cilindrul şi sfera pot fi întrebuinţate pentru realizarea unui efect artistic.

Să trecem în revistă câteva din aplicaţiile acestor corpuri la alcătuirea şi ornamentarea clădirilor.

1. **Planul.** Pereţii unei clădiri sunt în general suprafeţe plane verticale; uneori aceste suprafeţe au o mică înclinare faţă de planul vertical, spre exemplu, porţiunea din pereţii exteriori ai faţadei unei clădiri, dela teren până la *1 m* până la *1,5 m* deasupra lui; această parte se chiamă *soclu*.



Fig. 197.

Proptelele de zid, numite *contra-forturi,* sunt alcătuite din plane verticale şi plane înclinate; ele s'au întrebuinţat mai ales la catedralele înalte sau la castelele medievale, aşezate pe coline.

Unele mânăstiri din ţară (spre exemplu Mânăstirea Putna, construită de Ştefan cel Mare), au zidurile laterale sprijinite de contra-forturi, care pe lângă scopul principal de a ajuta la susţinerea clădirii, prezintă şi un efect ornamental.

În stilul românesc, care a luat în oraşe, o desvoltare mare,

cu deosebire după Expoziţia Naţională din anul 1906, contraforturile sunt întrebuinţate mai mult ca ornament [1]).

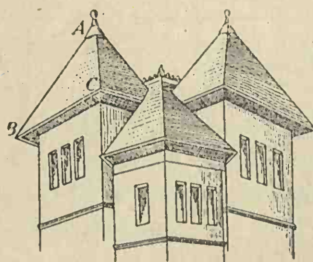


Fig. 198.

Acest motiv a fost folosit cu succes, chiar în ornamentarea ferestrelor [2]).

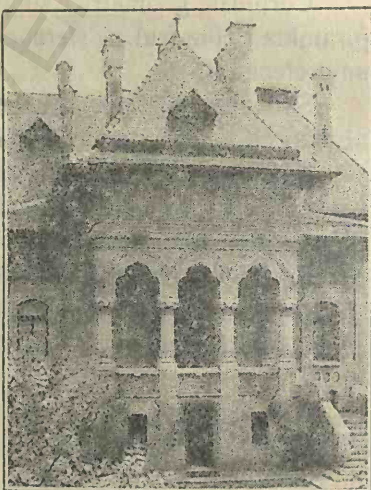
Suprafeţete plane sunt însă cu deosebire întrebuinţate la construcţia acoperişurilor, iar în stilul românesc, în care efectul estetic este obţinut prin linii simple, învelitoarea este în foarte multe cazuri un adevărat ornament al clădirii (fig. 197).

Clădirile în stil românesc fiind acoperite cu ţiglă, material relativ greu, înclinarea planelor acoperişurilor este în general de 45⁰ [3]).

Citâm ca exemple de acoperişuri în stil românesc formate din suprafeţe plane, casele din fig. 197, în special faţada dinspre parcul Ioanid, şi fig. 199.

2. **Prismele şi paralelelipipedele** sunt şi ele întrebuinţate în ornamentaţie.

Astfel stâlpii sau coloanele care susţin o clădire, au uneori forma unor prisme sau p a r a l e l i p i p e d e drepte.


Fig. 199.

În faţade, sunt folosite în unele stiluri coloane în formă de paralelipipede, de grosimi mici, în raport cu înălţimea, numite din această cauză *secţiuni de coloane.*

---

[1]) Vezi (fig. 197) casa *Ciru Iliescu* (faţada dinspre strada Polonă Nr. 1, Bucureşti), de Arch. *Petre Antonescu.*

Architect *Petre Antonescu.* Rector al Academiei de Architectură din Bucureşti. Este unul din marii noştri architecţi, care a contribuit în special la desvoltarea stilului românesc.

Lucrări mai importante: Ministerul Lucrărilor Publice (Bucureşti), Palatul Administrativ (Craiova), Palatul Societăţii Politechnice (Bucureşti), Banca Blank (Bucureşti), etc.

[2]) Vezi casa *Oprea Soare,* strada Sfinţii Apostoli Buc. de Arch. *Petre Antonescu* (fig. 199).

[3]) Pentru ca apa şi zăpada să poată aluneca lesne, spre a nu îngreuna acoperişul.

În stilul numit cubist, diferitele corpuri ce compun o clădire, au forma unor paralelipipede.



Fig. 200

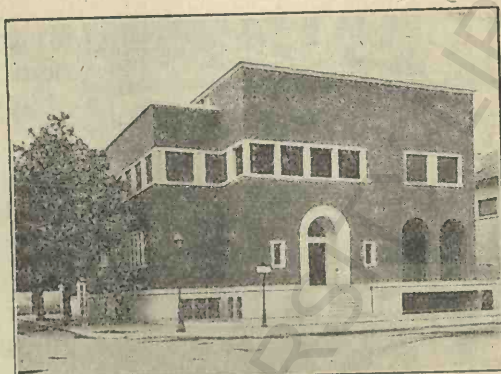


Fig. 201.

Fig 201 [1]) reprezintă o clădire formată din blocuri paralelipipedice.

În figura 200 se arată un felinar în formă de cub, întrebuinţat la o casă în stil cubist; serveşte în acelaş timp şi pentru a indica numărul casei.

3. **Piramida regulată** serveşte ca motiv arhitectonic, fie la ornamente din zidărie sau piatră, fie la acoperişuri de case (fig. 197, 202) şi biserici [4]) (fig. 203).



Fig. 202.



Fig. 203.

4. **Cilindrul.** Coloanele unei clădiri (fig. 204) şi în special a templelor, ateneelor (fig. 206), etc. au forma unor cilindrii.

Uneori aceste coloane sunt de fapt trunchiuri de con ale căror generatoare fac un unghiu foarte mic cu verticala, ceea ce le dă din depărtare, aspectul unor cilindri.

---

1) Casa Profesor *Constantin Buşilă* (Aleea Modrogan Nr. 1, Parcul Filipescu, Bucureşti). Architect *Duiliu Marcu*.

2) Fig. 203 reprezintă o biserică din Ardeal.

Pentru racordarea a două faţade plane, de direcţii diferite se foloseşte uneori o *suprafaţă cilindrică.*

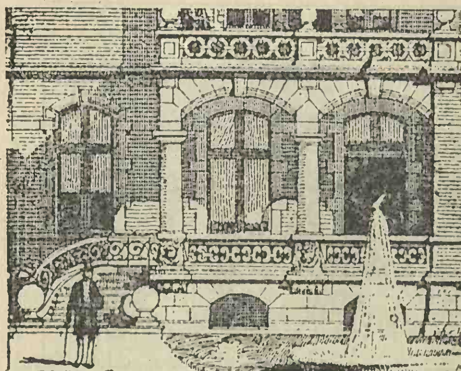


Fig. 204.



Fig. 205.

Şi semicilindrul se foloseşte în faţade şi interioare, ca motiv ornamental (fig. 208).

Unele turnuri de clădiri (fig. 205), moschee, clădiri [1]) (fig. 209), se execută în formă de cilindru sau de trunchiu de con.

5. **Conul.** Pentru învelirea corpurilor de clădiri, care au ca secţiune orizontală un cerc, se întrebuinţează un acoperiş în formă de con.

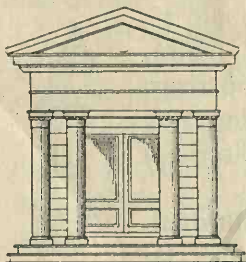


Fig. 206.



Fig. 209.

Astfel de corpuri de clădire se numesc şi *foişoare*. (vezi fig. 205 şi 209).

6. **Sfera** se întrebuinţează ca ornament în faţade (vezi spre exem. fig. 204: sferele depe balustrada balconului), iar *semisfera* ca învelitoare de observatoare astronomice, biserici (fig. 210), clădiri (fig. 207) etc.

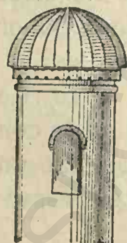


Fig. 207.



Fig. 208.

[1]) Fig. 209 reprezintă castelul M. S. Regina Maria, dela Balcic.

In acest caz învelitorile se numesc şi *cupole*.

Alteori, ornamentele se fac din combinarea corpurilor geome-



Fig. 210 1).

trice de mai sus: piramidă şi prismă, paralelipiped şi sferă, cilindru şi sferă sau con, etc.

1) Fig. 210 reprezintă biserica Stella-Alaris din Balcic.

CAP. XIII.

NOŢIUNI DE AGRIMENSURA.

Forma pământului *seamănă* cu aceea a unei sfere; se ştie din Geografie că globul pământesc este mai turtit spre poli şi mai umflat spre ecuator.

Dacă voim să măsurăm o porţiune *mare* din suprafaţa pământului, trebue să ţinem seamă că această suprafaţă este *curbă.*

Ştiinţa care studiază acest fel de probleme se numeşte *Geodezie* [1]).

Dacă însă suprafaţa de pământ este relativ mică, spre exemplu o livadă, o moşie, un oraş, etc., *nu facem o eroare mare* dacă considerăm că această suprafaţă este *plană.*

Studiul măsurării suprafeţelor relativ mici de pământ — *fără a ţine seama de sfericitatea globului pământesc* — *îl face Topografia.*

Partea din *Topografie*, care se ocupă în special cu măsurarea terenurilor productive: câmpuri semănate, vii, livezi, etc., se numeşte *Agrimensură* [2]) sau *Arpentaj* [3]).

Planimetrie. Un teren este în general o suprafaţă curbă ABCDEFG ... (ondulată, accidentată) (fig. 211).

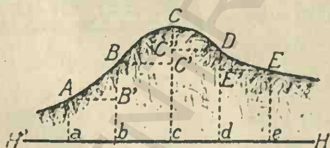


Fig. 211.

La măsurarea unui teren, intervin cu deosebire două categorii de probleme.

Exemple. 1. Să considerăm o suprafaţă de teren înclinată AB

---

[1]) Primele probleme de *Geodezie* s'au studiat în legătură cu aflarea lungimii meridianului pământesc.

[2]) *Agrimensură* înseamnă măsurarea câmpurilor.

[3]) *Arpentaj* este numirea ce se dă de obicei *operaţiunilor* de măsurare a unui teren de întindere mică: o curte, o livadă, etc.

Agrimensura (sau Arpentajul) erau cunoscute din antichitate de Chaldeeni şi Egipteni.

(fig. 212), care este semănată, sau pe care se găsesc plantaţi pomi roditori; să observăm că deoarece semănăturile, pomii, ... cresc vertical, cantitatea de vegetaţie nu depinde de ondulaţiile terenului AB, ci de mărimea *proiecţiunii ab* a lui, pe un plan orizontal.

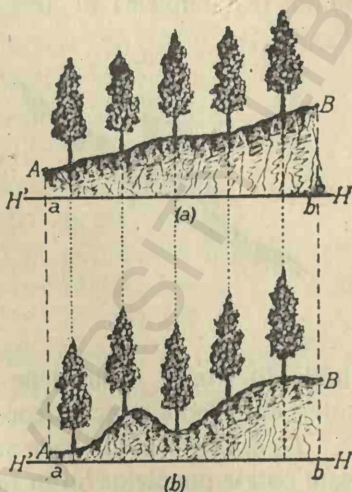


Fig. 212.

In fig. 212 *(a)* şi *(b)*, se arată două terenuri de forme diferite cu pomi roditori, însă având aceeaşi *proiecţiune orizontală ab = a'b'*; pe amândouă aceste suprafeţe de teren, numărul pomilor ce se pot sădi este acelaş.

2. Dacă pe un teren înclinat voim să clădim o casă (fig. 213), suprafaţa podelelor şi a tavanelor, *nu depinde de înclinarea* terenului, ci numai de proiecţiunea lui pe un plan orizontal H'H deoarece podelele şi tavanele se fac orizontale şi avem AC = DE = *ab*, iar costul unei clădiri se socoteşte ţinând seamă de preţul unui m^2 de construcţie, *în proiecţie orizontală.*

Din aceste exemple rezultă că în unele chestiuni interesează *numai proiecţiunea unui teren pe un plan orizontal.*



Fig. 213.

Definiţie. Studiul care se ocupă numai cu reproducerea pe desen a *proiecţiunii pe un plan orizontal a unui teren*, se cheamă *Planimetrie;* desenul astfel obţinut se cheamă *planul terenului.*

Altimetrie. In alte chestiuni interesează însă şi forma ondulată, pe care o are terenul şi anume diferenţele pe verticală dintre distanţele diferitelor puncte la un plan orizontal *ales după voie*, spre exemplu: BB' = B*b* — A*a*; CC' = C*c* — B*b*, etc. (fig. 211).

Distanţele punctelor la planul H se numesc *cotele* punctelor faţă de planul orizontal H.

Exemple. 1. Când voim să facem o şosea sau să construim o

cale ferată într'o regiune cu teren accidentat (în relief) (fig. 214), este adeseori necesar să tăiem pământul în unele locuri şi să împlinim (să umplem) în alte locuri; pentru acest scop, trebue să putem evalua cantităţile de pământ ce vor trebui *săpate (s)* sau cu ajutorul cărora va trebui să *umplem (u)* anumite regiuni; aceste volume de pământ depind deci de forma reliefului şi este necesar să cunoaştem cotele punctelor lui.

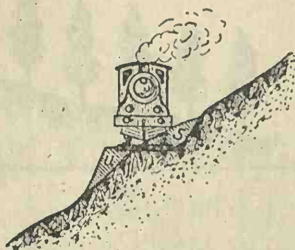


Fig. 214.

2. Dacă voim să facem o hartă, pe care să se arate şi înălţimile diferitelor locuri depe pământ, trebue deasemeni să aflăm cotele diferitelor puncte depe teren.

Definiţie. Studiul care se ocupă de *relieful* terenului şi stabileşte cotele punctelor lui în raport cu un plan orizontal de comparaţie se numeşte *Altimetrie* sau *Nivelment.*

Desenul obţinut prin aceste operaţiuni se numeşte *profilul terenului.*

In cele ce urmează vom studia câteva noţiuni de *planimetrie* (adică ridicarea planului unui teren).

Cele mai simple operaţiuni *pe teren*, care intervin în ridicarea unui plan, sunt:

1. Fixarea *pe teren* a poziţiunii unei linii drepte.
2. Măsurarea *pe teren* a unghiului dintre două direcţiuni.
3. Trasarea *pe teren* a două drepte (direcţiuni) perpendiculare.

Pentru a realiza aceste operaţiuni, ne servim de instrumentele pe care le descriem mai jos.

Instrumente întrebuinţate în agrimensură.

Pentru însemnarea diferitelor puncte, care mărginesc terenul, al cărui plan voim să-l ridicăm, se întrebuinţează: ţăruşi, fişe şi jaloane.



Fig. 215.

a) Ţăruşul este o bucată de lemn de 40—60 cm, ascuţită la unul din capete; înfigerea lui în pământ se face lovindu-l cu un ciocan sau cu un alt corp tare (fig. 215).

b) Fişa este o vergea de fier, de aproximativ 50 cm. lungime

(fig. 216), terminată la un capăt cu un vârf ascuţit, iar la capătul celălalt cu un inel. Fişa se întrebuinţează mai ales pentru însemnarea provizorie a punctelor pe teren.

c) Dacă este necesar însă ca punctele însemnate pe teren să fie văzute din depărtare, se întrebuinţează *jalonul.*



Fig. 216.

Jalonul este o tijă (prăjină), în mod obişnuit de 1,5 — 2,5 m. înălţime şi cu o grosime de 3 — 4 cm; la capătul, care se înfige în pământ, jalonul are o îmbrăcăminte de fier, terminată cu un vârf ascuţit, spre a putea pătrunde cu uşurinţă în teren. La capătul superior jalonul prezintă o tăietură verticală, în care se poate fixa o tablă de fier (fig. 217).

Fig. 217.

Pentru ca jalonul (care serveşte şi ca semnal) să poată fi văzut din depărtare, se vopseşte în mod alternativ cu roşu şi alb, iar tabla de fier deasemeni este vopsită în alb şi roşu.

Jaloanele trebuiesc înfipte în pământ în poziţie verticală, ceeace se verifică cu ajutorul *firului cu plumb* (fig. 217_1).

Aplicaţie. Stabilirea unei linii drepte pe teren. O dreaptă fiind determinată prin două puncte A, B, este suficient să înfigem în teren, în aceste puncte, doi ţăruşi sau două jaloane.


Fig. 217_1.

Dacă punctele A şi B sunt prea depărtate, se poate întinde o sfoară, care legată de cele două jaloane, hotărăşte poziţia pe teren a dreptei AB.

Aşa se procedează când se construiesc gardurile ce separă două proprietăţi; jaloanele sunt înlocuite în acest caz, cu stâlpii de lemn (*b*) (sau bulamacii), ce formează împreună cu scândurile (*s*) gardul.

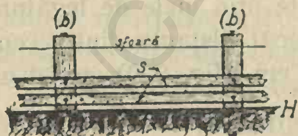


Fig. 218.

Se spune în vorbirea obişnuită că s'au aşezat bulamacii la sfoară.

Dacă punctele A şi B sunt relativ depărtate (distanţa între ele fiind mai mare de 15—20 metri), se obişnueşte să se fixeze între A şi B, şi alte puncte C, D,... pentru ca dreapta AB să fie cât mai bine hotărîtă.

In acest scop se procedează astfel: un observator (de obiceiu

conducătorul operaţiei) se aşează de o parte a jaloanelor A, B, la o distanţă oarecare şi astfel încât privind jalonul A, acesta să acopere complet jalonul B (fig. 219); aceasta însemnează că raza sa vizuală coincide cu direcţia AB.

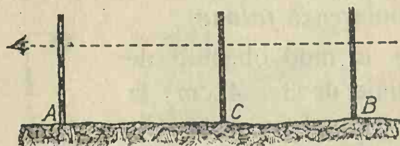


Fig. 219.

In această situaţie, el face semn unui ajutor, care poartă cu el jalonul C, spre exemplu, să-l ţină mai spre dreapta sau mai spre stânga, până ce jalonul A acoperă jalonul C. In această poziţie, la un semn al său, ajutorul înfige jalonul C în pământ.

Acest procedeu este întrebuinţat şi la prelungirea dreptei AB, dincolo de B, sau dincoace de A.

Punctele A, C, D..., B, astfel fixate, sunt în *aliniament*, iar operaţia de mai sus se cheamă şi *trasarea aliniamentului* (sau alinierea jaloanelor) sau *jalonarea* dreptei AB, sau *trasarea* pe teren a dreptei AB, etc.

Pentru măsurarea unei lungimi pe teren, se întrebuinţează cu deosebire: lanţul, ruleta şi panglica.

a) Lanţul are de obiceiu o lungime de 10 metri şi este format din 50 vergele de sârmă groasă, terminate la capete cu câte un

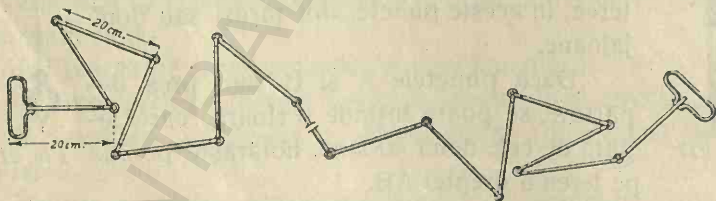


Fig. 220.

inel; două vergele consecutive sunt legate prin inele de legătură de fier; vergelele sunt astfel construite, încât distanţa dintre centrele a două inele de legătură este de 20 cm. (fig. 220), astfel că

$$50 \text{ vergele} \times 20 \text{ cm.} = 10 \text{ metri}$$

După fiecare cinci vergele consecutive, inelul de legătură în loc să fie de fier, este de alamă, spre a se deosebi cu uşurinţă metrii; inelul dela mijlocul lanţului are un mic apendice şi marchează 5 m.; la capete, lanţul se termină prin câte un mâner, de care ţine câte un operator.

b) Ruleta (sau lanţul de buzunar) este o pânză îngustă de 1,6—2 cm. lăţime şi având o lungime de 10 m. sau 20 m., care se poate înfăşura pe un ax O, situat într'o cutie rotundă. Ruleta este un instrument foarte practic pentru măsurători de mică importanţă, spre exemplu pentru dimensiunile unui teren de casă, lăţimea unei străzi, etc.

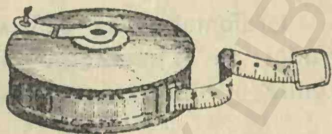


Fig. 221.

Din cauza umidităţii şi a întinderii pânzei, ruleta nu este un instrument de precizie (fig. 221).

c) Panglica. Lanţul are o lungime relativ mică (10 m.) şi măsurarea unei lungimi mai mari cere timp, iar pe de altă parte lanţul se sugrumă lesne, adică face noduri, ceeace poate da naştere la erori; din această cauză se întrebuinţează o panglică de metal de 20 m. lungime, înfăşurată într'o cruce de lemn (fig. 222).

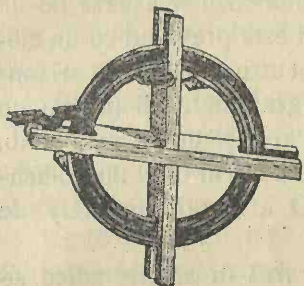


Fig. 222.

Panglica este un instrument mai precis decât lanţul.

Aplicaţii. 1. Măsurarea unei drepte situate pe un teren orizontal.

Pentru a măsura cu lanţul distanţa dintre două puncte A şi B, un operator ţine de un capăt al lanţului în A, iar al doilea operator pleacă înainte şi are grija ca lanţul să nu facă noduri; când lanţul e complect întins, al doilea operator a parcurs 10 metri. In această situaţie, operatorii după ce s'au convins că lanţul este întins în direcţia liniei AB, înfig în teren câte un jalon la capetele lanţului; apoi al doilea operator scoate jalonul şi înfige în pământ o fişă din cele zece, pe care le are cu el, şi pleacă înainte, fiind urmat de primul operator.

Când acesta din urmă à ajuns în dreptul fişei, al doilea operator a mai parcurs 10 metri şi înfige în pământ o a doua fişă, rămânând (în mână) numai cu 8 fişe, etc.

După 100 metri, dela locul de plecare, primul operator, care a strâns cele 10 fişe, înfipte în pământ de al doilea operator, i le restituie şi începe din nou operaţia. Astfel, dacă în urma parcurgerii distanţei AB, s'a făcut de 5 ori schimbarea fişelor şi al doilea operator mai are trei fişe în mână, iar între punctul B şi locul ultimei fişe este o distanţă de 3,20 m., distanţa AB va fi:

$$AB = 5 \times 100 + 7 \times 10 + 3,20 \text{ m} = 573,20 \text{ m}.$$

Măsurări de unghiuri. Măsurarea (sau ridicarea) unghiurilor a două direcţiuni depe teren, se poate face într'un mod simplu cu *grafometrul.*

Grafometrul (fig. 223) este compus dintr'un *limb* semicircular gradat; la extremităţile diametrului AB se găsesc fixate două *pinule* (p, p') care determină un plan de vizare *fix;* aceasta este *alidada fixă.*

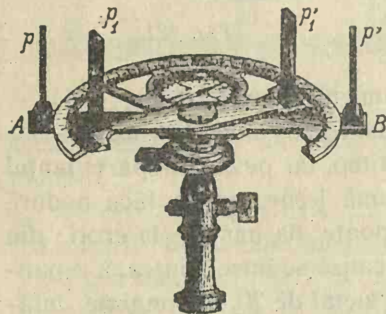


Fig. 223.

În jurul centrului se mişcă o *alidadă mobilă,* prevăzută şi ea cu pinule (p_1, p'_1), care determină un al doilea plan de vizare mobil.

Grafometrul se aşează pe un tripied şi este prevăzut cu un dispozitiv pentru verificarea orizontalităţii grafometrului (nivela cu bulă de aer) şi un fir cu plumb, pentru ca centrul O al instrumentului să se proiecteze exact în vârful O al unghiului xOy de măsurat.

Se procedează astfel: *se pune aparatul în staţie,* adică se aranjează astfel ca planul grafometrului să fie *orizontal,* iar centrul lui O să fie *pe verticala vârfului O, al unghiului xOy,* ale cărui direcţii sunt fixate prin jaloane (X pe Ox şi Y pe Oy).

Alidada fixă se aşează în direcţia laturii ox, spre exemplu şi se roteşte alidada mobilă, până ce vizăm jalonul din punctul Y; în această poziţie, citim pe grafometru ∢ xOy.

Trasarea pe teren a două drepte perpendiculare. Un instrument care poate servi pentru această operaţiune este:

Echerul (sau pantometrul) (fig. 224 şi 225). El este compus

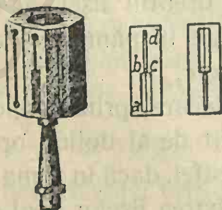


Fig. 224.

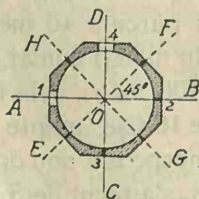


Fig. 225.

dintr'o prismă octogonală regulată; pe feţele A, B, C, D se găseşte câte o fereastră numită *pinulă,* formată dintr'o parte *ab,*

mai largă şi alta *cd* mai îngustă; pe partea *ab* şi în prelungirea deschiderii *cd*, se găseşte un fir subţire. Pe faţa opusă B a echerului, fereastra are partea mai largă sus şi partea mai îngustă jos.

Observatorul poate viza prin ferestrele a două feţe opuse; întreg aparatu' poate fi aşezat pe un tripied.

Pentru a ridica o perpendiculară OD pe dreapta AB, aşezăm aparatul astfel ca centrul lui O să fie pe verticala punctului O depe teren, iar unul din planele de vizare (depe feţele (1) şi (2)) să fie în direcţia AB; un ajutor este trimes cu un jalon în direcţia OD, şi este îndreptat mai la stânga sau mai la dreapta, până ce este văzut în direcţia de vizare (3, 4), care este perpendiculară pe prima.

Echerul mai poate servi şi pentru trasarea a două direcţii, care să facă între ele un unghiu de 45°, sau pentru trasarea unui aliniament.

Ridicarea unui teren. Planul terenului.

A ridica planul unui teren înseamnă a efectua *pe teren* măsurarea unghiurilor şi distanţelor care determină forma şi mărimea acelui teren.

Spre exemplu, dacă terenul este dreptunghiular, este suficient să măsurăm cele două dimensiuni: AB, BC ale dreptunghiului (fig. 226); dacă terenul este un trapez ABCD, trebuie să măsurăm

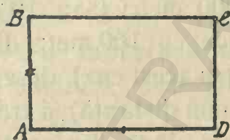


Fig. 226.

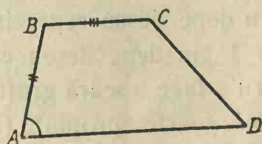


Fig. 227.

spre exemplu bazele AD şi BC, latura AB şi unghiul DAB, etc. (fig. 227).

După ce pe *teren* am măsurat lungimile şi unghiurile, care fixează forma şi mărimea terenului, se procedează la executarea planului.

Aşezarea pe o hârtie de desen, a mărimilor *ridicate pe teren*, se cheamă *raportarea pe plan;* pe foaia de desen nu putem aşeza însă lungimile de pe teren în adevărată mărime, ci fiecare distanţă o figurăm de un număr de ori mai mic: spre exemplu 1 metru depe teren printr'un centimetru de pe desen, adică printr'o lungime de 100 de ori mai mică decât lungimea de pe teren.

Figura astfel obţinută pe desen, are toate unghiurile egale cu acelea din realitate, iar lungimile sunt de un acelaş număr de ori mai mici decât lungimile de pe teren; această figură este deci *asemenea* cu figura din natură, deoarece aceste figuri au unghiurile egale şi laturile proporţionale.

Planul terenului este deci o figură *asemenea* cu figura din natură.

Scara de reducere. Raportul, dintre o lungime oarecare de pe plan şi lungimea de pe teren corespunzătoare, se cheamă *scara de reducere* sau mai scurt *scara planului.*

Scara unui plan se poate reprezenta:

1. Printr'o fracţiune, al cărei numărător este unitatea; spre exemplu scara $\frac{1}{1000}$ însemnează că 1 metru de pe plan reprezintă 1000 metri de pe teren; de aci rezultă că la această scară 7,4 dm de pe plan reprezintă 740 metri din natură, 13,7 cm de pe plan corespunde cu 137 metri de pe teren, etc.

Pentru planuri de clădiri se obişnuieşte să se scrie în josul planului: Spre exemplu scara 2 cm = 1 m, adică 2 cm depe plan reprezintă 1 metru depe teren. Această scară este echivalentă cu scara $\frac{1}{50}$.

2. Grafic. Fie spre exemplu scara $\frac{1}{10.000}$, aceasta înseamnă că 1 metru depe desen reprezintă 10.000 metri (sau 10 km) depe teren sau 1 cm depe desen corespunde cu 100 metri din natură.

Pentru a face o scară grafică (pentru acest caz), desenăm două linii paralele foarte apropiate (la 1—2 mm distanţă) şi tragem câte o linie mică perpendiculară pe primele două, din centimetru în centimetru; apoi în dreptul fiecărei diviziuni scriem respectiv: 100 m, 200 m, . . . (fig. 228).



Fig. 228.

Pentru a putea aprecia pe desen fracţiuni de centimetru, se prelungeşte scara spre stânga punctului 0 (zero) cu 1 cm şi se împarte acest centimetru în 10 mm; acest segment din scară se chiamă *talon.* Un milimetru depe talon reprezintă în cazul considerat 10 metri din natură şi cum cu ochiul liber se poate citi până la $^1/_2$ mm, vom putea citi pe această scară sute de metri, zeci de

metri şi fracţiuni de câte 5 metri; această prelungire a scării spre stânga se chiamă *talonul* scării.

Astfel, dacă avem de purtat pe desen o lungime depe teren de 850 metri, punem piciorul compasului în dreptul diviziunii 800 metri şi îl deschidem până ce capătul celălalt vine în dreptul diviziunii 50 depe talon; invers, dacă voim să ştim care este în natură distanţa între punctele corespunzătoare pe desen, luăm cu compasul acea distanţă, o punem pe scară, cu un vârf în dreptul unei diviziuni (număr exact de cm), iar vârful celălalt va cădea undeva pe talon şi vom putea citi în exemplul luat acea distanţă.

Metode de ridicare a planului unui teren. Din metodele de ridicare ale unui teren, cele mai simple sunt următoarele:

I. Metoda perpendicularelor. Fie de ridicat terenul în forma unui pentagon neregulat ABCDE; se alege diagonala cea mai lungă AD şi se coboară cu ajutorul *echerului* perpendicularele B*b*, C*c*, Ee, (aşa precum s'a arătat la pag. 150).

Se măsoară apoi cu lanţul distanţele A*b*, *be*, *ec*, *c*D, precum şi lungimile perpendicularelor B*b*, C*c*, E*e*. (fig. 229).

Cu aceste elemente putem *desena* apoi planul la o scară oarecare şi *calcula aria terenului*, ea fiind suma unor triunghiuri (AB*b*, C*c*D, DE*e*, E*e*A) şi a unor trapeze (*b*BC*c*).

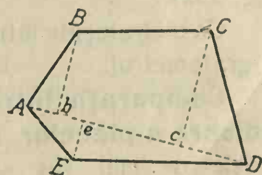


Fig. 229.

Observare. În metoda perpendicularelor, instrumentele necesare sunt deci *lanţul* şi *echerul*.

II. Metoda prin radiere (sau prin raze concurente), constă în a alege un punct interior O, din care ducem razele OA, OB, OC, OD, OE; poligonul se descompune astfel în o sumă de triunghiuri (fig. 230).

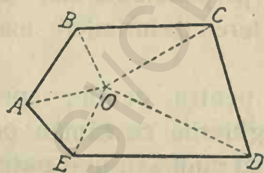


Fig. 230.

Operaţia aceasta de descompunere a unui teren în triunghiuri se chiamă *triangulaţie*.

Pentru aplicarea acestei metode, putem proceda în mai multe chipuri:

1. Ridicarea numai cu lanţul. Se măsoară cu lanţul laturile tuuror triunghiurilor în care s'a descompus poligonul şi apoi se construieşte *la scară* planul poligonului.

Ca verificare, trebuie ca atunci când desenăm triunghiurile OAB, OBC, OCD, ODE şi OEA, ultimele două triunghiuri (ODE şi OEA) să aibă o latură comună: OE, adică suma unghiurilor din jurul punctului O să fie exact egală cu 360⁰.

2. Ridicarea cu lanţul şi grafometrul constă în a măsura cu lanţul lungimile razelor OA, OB, ..., OE, iar cu grafometrul unghiurile AOB, BOC, ..., EOA.

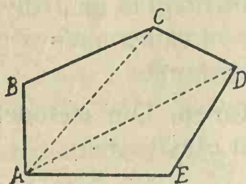


Fig. 231.

Observare. Când dimensiunile terenului nu sunt prea mari (fig. 231), punctul O se alege chiar într'unul din vârfurile poligonului, spre exemplu în A, de unde se duc diagonalele AC, AD şi se descompune astfel poligonul în triunghiuri.

III. *Metoda prin îndrumuire* se aplică cu deosebire atunci când nu putem face măsurători în interiorul terenului, spre exemplu când ridicăm o pădure, un oraş mărginit de şosele, etc.

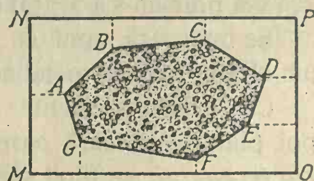


Fig. 232.

Metoda constă în a măsura laturile AB, BC,... EA şi unghiurile A, B,... E. (fig. 232).

Ca instrumente întrebuinţăm lanţul şi grafometrul.

Comparaţie între metodele de ridicare a planelor. Fiecare din metodele de mai sus se întrebuinţează în anumite cazuri.

Când voim să ridicăm un teren şi procedăm la o *triangulaţie*, punctele mai importante, cum ar fi într'un oraş o piaţă, o clădire importantă, etc., se numesc *puncte principale*; punctele de mai mică importanţă se numesc *puncte secundare*.

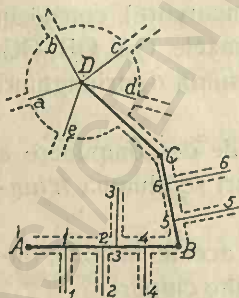


Fig. 233.

Astfel: Metoda perpendicularelor se aplică în cazul unui teren de întindere mai mică;

Metoda radierii, pentru detalii, spre exemplu pentru triunghiurile ce rămân pe marginea unei figuri mai mult sau mai puţin regulate.

Metoda îndrumuirii se întrebuinţează, cum s'a arătat mai sus, când nu putem pătrunde în interiorul terenului.

Astfel, pentru ridicarea unui oraş se face o îndrumuire ABCD pe arterele mai importante; A, B, C, D sunt *puncte principale* (fig. 233); din această îndrumuire, prin metoda perpendicularelor (1, 1), (2, 2),... sau a radierii (D*a*, D*b*. . .), se ridică şi punctele vecine secundare.

Calculul suprafeţii terenului ridicat se face calculând ariile figurilor (triunghiuri, trapeze), în care se descompune terenul ridicat.

Pentru calcularea ariei unei păduri (sau a unui teren în care nu putem pătrunde), se face o îndrumuire ABCD... pe marginea pădurii şi se circumscrie un dreptunghiu MNPQ (fig. 232), ridicându-se partea exterioară pădurii prin metoda perpendicularelor; aria terenului ABCD se află scăzând din aria dreptunghiului circumscris, ariile trapezelor formate pe margine.

Calculul unei arii limitate de o curbă. Dacă un teren ABCDEF este limitat şi de o curbă, precum BCD, se încearcă să se ducă o dreaptă MN, astfel ca aria (*1*) + (*2*) să fie egală cu aria (*3*) (fig. 234).

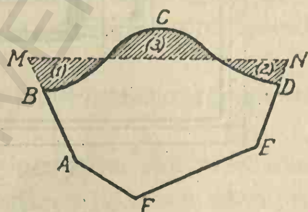


Fig. 234.

În modul acesta, aria terenului dat se poate înlocui cu a terenului poligonal AMNEF.

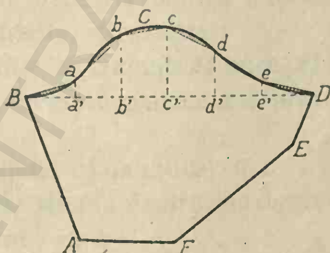


Fig. 235.

Trasarea liniei MN nu este însă uşoară; ea presupune o deosebită experienţă din partea operatorului.

Un procedeu mai exact este următorul: Pe curba BCD, se iau punctele *a*, *b*, *c*,. . .şi se proiectează în *a' b' c'* pe diagonala BD; aria BCDE se descompune într'o sumă de trapeze (şi două triunghiuri la capete). Cu cât punctele *a*, *b*, *c*,. . . . . *sunt mai numeroase şi mai*

dese, cu atât rezultatul calculului este mai exact, întrucât porțiunile lăsate de o parte (neglijate) sunt mai mici (fig. 235).

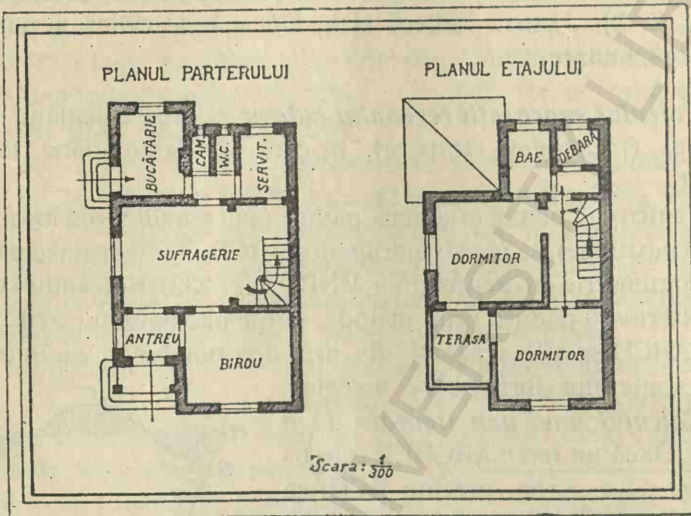


Fig. 236.

În fig. 236 se arată planul unei case în parter și etaj la scara $^1/_{300}$.

REZUMAT.

CAP. XIII. — NOŢIUNI DE AGRIMENSURĂ.

* *Geodezia* se ocupă cu studiul suprafeţelor mari depe pământ, ţinând seama de *sfericitatea* globului pământesc.

* *Topografia* are ca obiect studiul măsurării suprafeţelor depe pământ, relativ mici (fără a ţine seama că pământul este rotund, ci presupunându-l plan).

* *Agrimensura* sau *Arpentajul* este studiul măsurării terenurilor cultivabile.

* *Planimetria* este studiul, care se ocupă cu ridicarea unui teren, etc. şi raportarea pe desen a proecţiunii lui pe un plan orizontal.

* *Altimetria* (sau Nivelmentul) are ca obiect studiul reliefului unui teren.

* *Instrumentele* necesare pentru fixarea punctelor pe teren, trasarea unei linii drepte, etc., sunt:

a) ţăruşul, *b)* fişa, *c)* jalonul, *d)* mira, *e)* firul cu plumb.

* Instrumentele necesare pentru măsurarea lungimilor de pe teren sunt:

a) lanţul, *b)* ruleta, *c)* panglica, etc.

* Un instrument simplu pentru măsurarea pe teren a unghiurilor este grafometrul.

* *Echerul* (sau pantometrul) este un instrument, care serveşte la ridicarea perpendicularelor pe teren, la trasarea de aliniamente, etc.

* *Planul* este reprezentarea în desen a unei figuri din natură, printr'o figură *asemenea* cu ea.

Scara unui plan este raportul dintre lungimile de pe desen şi lungimile corespunzătoare din natură; scările pot fi *numerice* şi *grafice*.

* Metodele mai importante pentru ridicarea planelor sunt:

1. *Metoda perpendicularelor.*

2. *Metoda prin radiere, a)* numai cu lanţul, *b)* cu lanţul şi grafometrul.

Operaţia de descompunere a unei suprafeţe în triunghiuri se numeşte *triangulaţie.*

3. *Metoda prin îndrumuire,* cu lanţul şi grafometrul.

* *Calculul suprafeţei unui teren se face astfel:*

A) Dacă suprafaţa este limitată numai din linii drepte, prin descompunerea ei în triunghiuri şi trapeze.

B) Dacă este mărginită de o linie curbă: *a)* prin înlocuirea liniei curbe printr'o dreaptă, *b)* prin înlocuirea liniei curbe printr'o linie poligonală şi descompunerea ariei în trapeze, etc.

TABLA DE MATERIE

CAP. VIII. CILINDRUL

CAP. IX. CONUL

CAP. X. SFERA

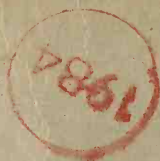
Pag.

CAP. XI. APLICAŢIUNI CARE SE REZOLVĂ PRIN ARITMETICĂ ŞI ALGEBRĂ

CAP. XII. ANALIZA CÂTORVA ORNAMENTE ARTISTICE CU CARACTER GEOMETRIC

CAP. XIII. AGRIMENSURĂ

C. 33.898. — M. O., IMPRIMERIA CENTRALĂ.





AU APĂRUT:

1. De aceiaşi autori:

ARITMETICA	Clasa	I	secundară
„	„	II	„
„	„	III	„
GEOMETRIA	Clasa	II	secundară
„	„	III	„
„	„	IV	„
„	„	V	„
„	„	VI	„
ALGEBRA	„	IV	secundară
„	„	V	„
„	„	VI	„
ASTRONOMIA . . .	„	VII	„

2. De Ernest Abason

GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ pentru clasa VII secundară.
GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ „ Şcolile Politechnice, Facultăţile de ştiinţe, Şcoli militare de aplicaţie, etc.
MECANICA . . . . pentru Clasa VIII secundară.
MECANICA . . . . „ Şcolile Politechnice, Facultăţile de ştiinţe, Şcoli militare de aplicaţie, etc.

3. Vor apare:

ALGEBRA	„	VII	„
ALGEBRA	„	VIII	„
GEOMETRIA ANALITICĂ	„	VIII	„

Preţul cărţii . . . Lei 80.75
5% Taxa Casei C. D. „ 4.25
Total Lei 85.—